Funções

Análise, a arte de limitar e de aproximar

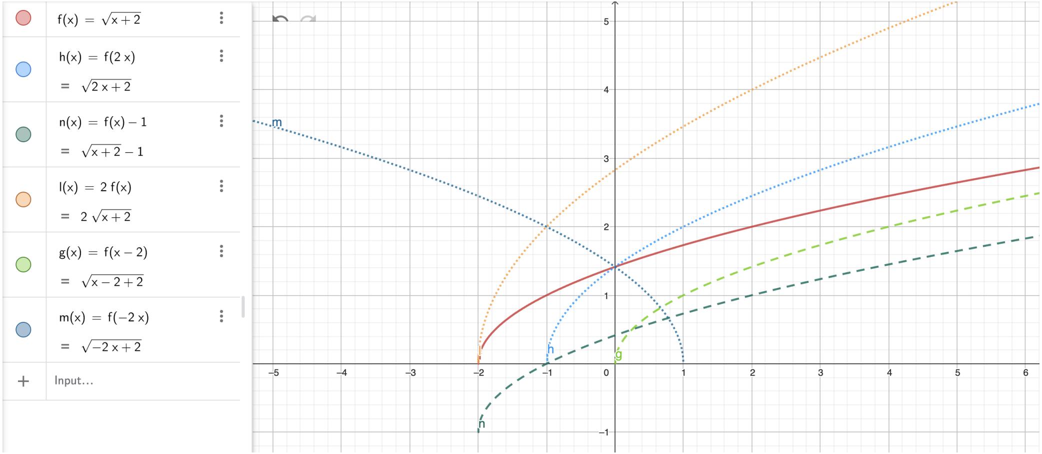
Santiago Verdasco Ramos

santiago.verdasco@upm.es

7 de agosto de 2025

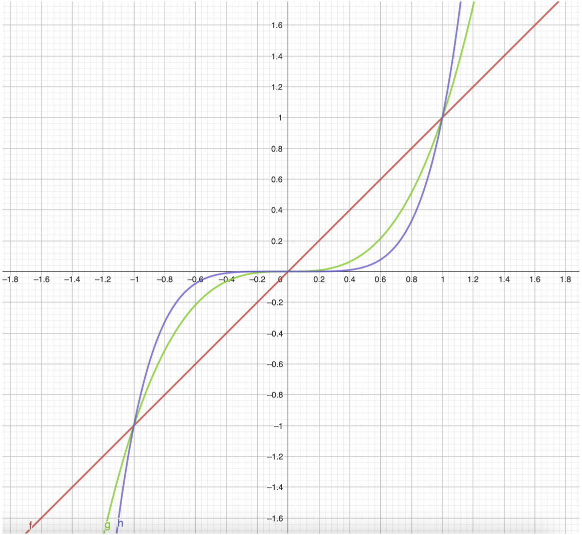
GeoGebra - Calculadora gráfica

Transformações básicas



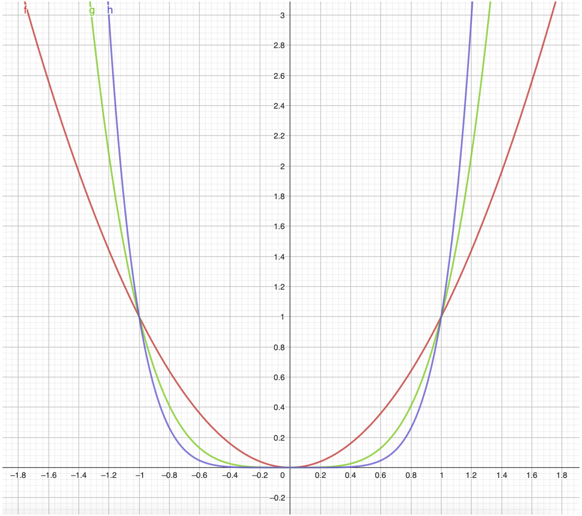
Monômios ímpares

1. $f(x) = x^{2n-1}$
2. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 0 \iff x = 0$
4. $f(x) > 0 \iff x > 0$
5. Tem simetria ímpar: $f(-x) = -f(x)$
6. Exemplo: x, x^3, x^5



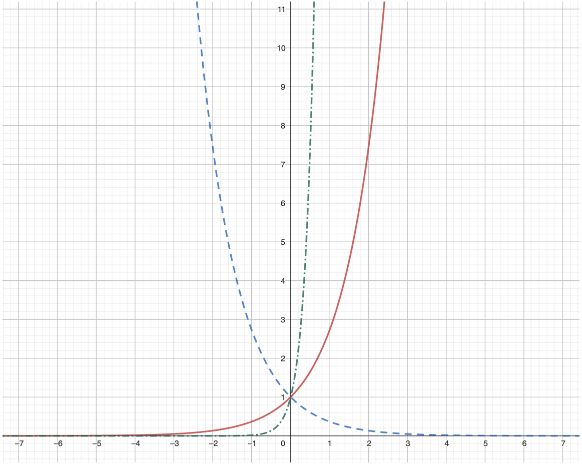
Monômios pares

1. $f(x) = x^{2n}$
2. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = [0, \infty)$.
3. $f(x) = 0 \iff x = 0$
4. $f(x) > 0 \iff x \neq 0$
5. Tem simetria par: $f(-x) = f(x)$
6. Exemplo: x^2, x^4, x^6



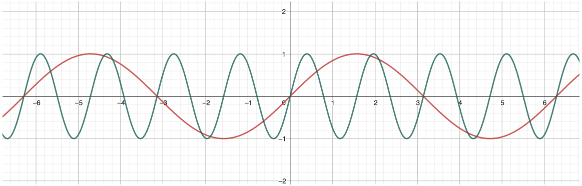
Função exponencial

1. $f(x) = e^x$
2. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = (0, \infty)$.
3. $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. Exemplo: e^x, e^{4x}, e^{-x}



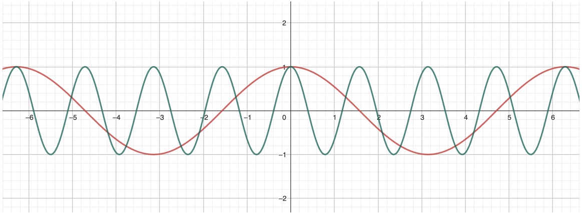
Função seno

1. $f(x) = \sin(x)$
2. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$.
3. $f(x) = 0 \iff x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. $f(x) > 0 \iff x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. Tem simetria ímpar: $f(-x) = -f(x)$
6. Exemplo: $\sin(x)$, $\sin(4x)$



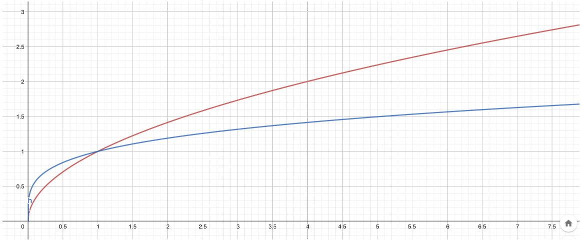
Função cosseno

1. $f(x) = \cos(x)$
2. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = [-1, 1]$.
3. $f(x) = 0 \iff x = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
4. $f(x) > 0 \iff x \in ((2k - \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$.
5. Tem simetria par: $f(-x) = f(x)$
6. Exemplo: $\cos(x)$, $\cos(4x)$
7. É verdade que $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$



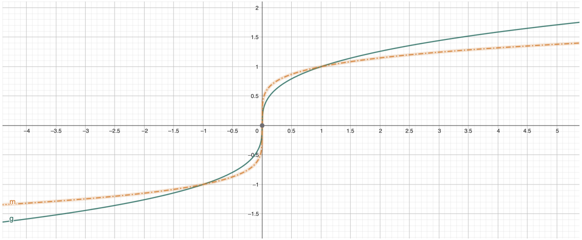
Função raiz par

1. $f(x) = \sqrt[2n]{x}$
2. $\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty)$, $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$
3. $f(x) = 0 \iff x = 0.$
4. $f(x) > 0 \iff x > 0.$
5. Não tem simetria.
6. Exemplo: $\color{red}{\sqrt{x}}$, $\color{blue}{\sqrt[4]{x}}$



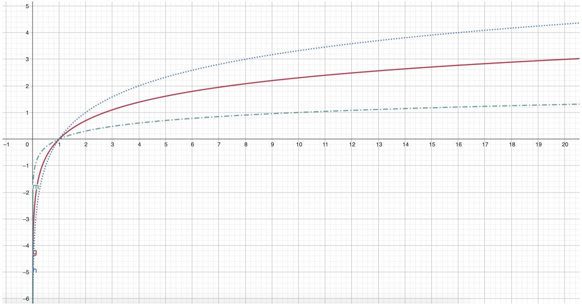
Função raiz ímpar

1. $f(x) = \sqrt[2n-1]{x}$
2. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 0 \iff x = 0.$
4. $f(x) > 0 \iff x > 0.$
5. Tem simetria ímpar $f(-x) = -f(x)$.
6. Exemplo: $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[5]{x}$



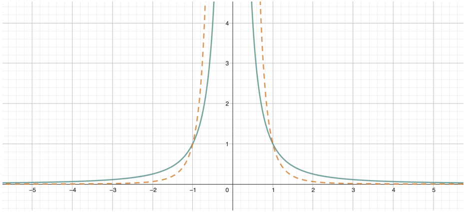
Função logaritmo

1. $f(x) = \log(x)$
2. $\mathrm{Dom}(f) = (0, \infty)$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 0 \iff x = 1$.
4. $f(x) > 0 \iff x > 1$.
5. Não tem simetria.
6. Exemplo: $\ln(x)$, $\log_2(x)$, $\log_{10}(x)$.
7. É verdade que $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$



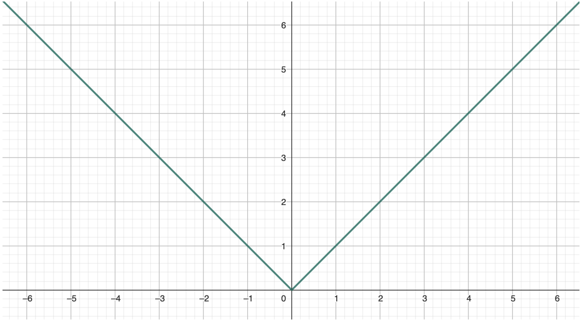
Inversos de monômios

1. $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \geq 1$ inteiro.
2. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. Se n é par, $f(x) > 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$.
5. Se n é ímpar, $f(x) > 0 \iff x > 0$.
6. Tem simetria par se n é par, e tem simetria ímpar se n é ímpar.
7. Exemplo: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$.



Valor absoluto

1. $f(x) = |x|$.
2. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 0 \iff x = 0.$
4. $f(x) > 0 \iff x \neq 0.$
5. Tem simetria par: $f(-x) = f(x)$
6. Exemplo: $|x|$.



Questão de domínios

Proposição

1. $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
2. $\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
3. $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}(f))$
4. $\mathrm{Dom}(\frac{1}{f}) = \mathrm{Dom}(f) \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

Exemplo

Tomemos a função $x \mapsto \log(\frac{1}{1+\cos x})$.

$$\mathrm{Dom}(\log(\tfrac{1}{1+\cos x})) = \mathrm{Dom}(\tfrac{1}{1+\cos x}) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}(\log x))$$
$$= \left[\mathrm{Dom}(1+\cos x) \cap \{x \in \mathbb{R} : 1+\cos x \neq 0\}\right] \cap \{x \in \mathbb{R} : 1+\cos x \in \mathrm{Dom}(\log) = (0,\infty)\}$$

Questão de domínios

Proposição

1. $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
2. $\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
3. $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}(f))$
4. $\mathrm{Dom}(\frac{1}{f}) = \mathrm{Dom}(f) \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

Exemplo

Tomemos a função $x \mapsto \log(\frac{1}{1+\cos x})$.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Dom}(\log(\tfrac{1}{1+\cos x})) = \mathrm{Dom}(\tfrac{1}{1+\cos x}) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}(\log x)) \\
&= \big[\mathrm{Dom}(1+\cos x) \cap \{x \in \mathbb{R} : 1+\cos x \neq 0\}\big] \cap \{x \in \mathbb{R} : 1+\cos x \in \mathrm{Dom}(\log) = (0,\infty)\} \\
&= \Big[\mathrm{Dom}(1) \cap \mathrm{Dom}(\cos x) \cap \big[\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}\big]\Big] \cap \big[\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}\big]
\end{aligned}
$$

Questão de domínios

Proposição

1. $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
2. $\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
3. $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}(f))$
4. $\mathrm{Dom}(\frac{1}{f}) = \mathrm{Dom}(f) \cap \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) \neq 0\}$

Exemplo

Tomemos a função $x \mapsto \log(\frac{1}{1+\cos x})$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Dom}(\log(\tfrac{1}{1+\cos x})) = \mathrm{Dom}(\tfrac{1}{1+\cos x}) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}(\log x)) \\
=&\Big[\mathrm{Dom}(1) \cap \mathrm{Dom}(\cos x) \cap [\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}]\Big] \cap [\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}] \\
=&\Big[\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap [\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}]\Big] \cap [\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}]
\end{aligned}$$

Questão de domínios

Proposição

1. $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
2. $\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
3. $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}(f))$
4. $\mathrm{Dom}(\frac{1}{f}) = \mathrm{Dom}(f) \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

Exemplo

Tomemos a função $x \mapsto \log(\frac{1}{1+\cos x})$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(\log(\tfrac{1}{1+\cos x})) &= \mathrm{Dom}(\tfrac{1}{1+\cos x}) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}(\log x)) \\
&= \Big[\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap [\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}]\Big] \cap [\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}] \\
&= \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Continuidade e diferenciabilidade

1. Todas as funções vistas são contínuas em todo o seu domínio.
2. Todas as funções vistas são diferenciávels em todo o seu domínio exceto $\sqrt{x}$, que não é diferenciável em $x = 0$ (tem inclinação infinita), e $|x|$, que não é diferenciável em $x = 0$ (deveria ter dos inclinações diferentes, -1 e $+1$).
   Definição de derivada

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = +\infty \tag{1}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = -1 \neq +1 = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} \tag{2}$$

O que é a continuidade

A continuidade é la propriedade de uma função f num ponto $p \in \mathbb{R}$ de transformar pontos x próximos a p em pontos $f(x)$ próximos $f(p)$. Mas...quanto de próximos?

O que é a continuidade

A continuidade é la propriedade de uma função f num ponto $p \in \mathbb{R}$ de transformar pontos x próximos a p em pontos $f(x)$ próximos $f(p)$. Mas... quanto de próximos? Arbitrariamente perto.

O que é a continuidade

A continuidade é la propriedade de uma função f num ponto $p \in \mathbb{R}$ de transformar pontos x próximos a p em pontos $f(x)$ próximos $f(p)$. Mas...quanto de próximos? Arbitrariamente perto.

Se quisermos que $f(x)$ esteja a uma distância menor que ε de $f(p)$, teríamos que tomar x a uma distância muito pequena de p.

O que é a continuidade

A continuidade é la propriedade de uma função f num ponto $p \in \mathbb{R}$ de transformar pontos x próximos a p em pontos $f(x)$ próximos $f(p)$. Mas...quanto de próximos? Arbitrariamente perto.
Se quisermos que $f(x)$ esteja a uma distância menor que ε de $f(p)$, teríamos que tomar x a uma distância muito pequena de p. Em outras palavras

Definição

Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ é contínua em $c \in [a,b]$ se e só se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que

$$d(f(x), f(p)) \leq \varepsilon \qquad \text{se } d(x,p) \leq \delta(\varepsilon, p)$$

Exemplos

Exemplo

A função $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em 0 porque para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0$ tal que

$$d(f(x), f(0)) = d(\sqrt{x}, 0) = \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta(\varepsilon)} \leq \varepsilon \qquad \text{se } d(x, 0) \leq \delta(\varepsilon, 0)$$

Exemplos

Exemplo

A função $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \frac{1}{n} \text{ para } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

não é contínua em 0 porque para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, e para todo $\delta > 0$, existe um ponto x tal que $d(x, 0) \leq \delta$ mas $d(f(x), f(0)) > \frac{1}{2}$. Precisamente, $x = \frac{1}{n}$ para n suficientemente grande.

Exemplos

Exemplo

A função $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x = \frac{1}{n} \text{ para } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é contínua em 0 porque para todo $\varepsilon > 0$, podemos pegar $\delta(\varepsilon, 0) = \varepsilon > 0$, então

$$d(f(x), f(0)) = \begin{cases} x & \text{se } x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \leq x \leq \delta(\varepsilon) = \varepsilon \qquad \text{se } d(x,0) \leq \delta(\varepsilon, 0).$$

Consequências da continuidade

Proposição

Se f é contínua em c, podemos trocar limites que convergem para c com a função f: se $(a_n)_n \subseteq [a, b]$ é uma sequência que converge para c, então $(f(a_n))_n \subseteq \mathbb{R}$ também é convergente e

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) = f(c)\ .$$

Diferenciabilidade

A diferenciabilidade de uma função f num ponto p é a propriedade de ser bem aproximada por uma reta perto do ponto p. Mas... quanto de bem aproximada?

Diferenciabilidade

A diferenciabilidade de uma função f num ponto p é a propriedade de ser bem aproximada por uma reta perto do ponto p. Mas. . . quanto de bem aproximada? Arbitrariamente bem!

Diferenciabilidade

A diferenciabilidade de uma função f num ponto p é a propriedade de ser bem aproximada por uma reta perto do ponto p. Mas...quanto de bem aproximada? Arbitrariamente bem!
Procuramos una reta da forma $r(x) = f(p) + mx$ para algum $m \in \mathbb{R}$ (inclinação) tal que para todo ε, "a distância" entre a f e r seja menor que ε num pequeno ambiente de p.

Diferenciabilidade

A diferenciabilidade de uma função f num ponto p é a propriedade de ser bem aproximada por uma reta perto do ponto p. Mas... quanto de bem aproximada? Arbitrariamente bem!
Procuramos una reta da forma $r(x) = f(p) + mx$ para algum $m \in \mathbb{R}$ (inclinação) tal que para todo ε, "a distância" entre a f e r seja menor que ε num pequeno ambiente de p. Em outras palavras,

Definição

Uma função $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ é diferenciável em p se e só se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que

$$d(f(x),\ [f(p) + mx]) \leq \varepsilon|x - p| \qquad \text{se } d(x, p) \leq \delta(\varepsilon, p).$$

Então, diz-se que m é a derivada de f em p e escrevemos $f'(p) = m$.

Diferenciabilidade

Observação

Se f é diferenciável em p, e $m, n \in \mathbb{R}$ são dos inclinações possíveis, então $n = m$. Isso significa que podemos definir a função derivada f' a partir de f!
Além disso, f é diferenciável em p se e só se existe o limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} .$$

Nesse caso, a inclinação $f'(p)$ é o valor do limite. Mas...como é definido este limite?

Proposição

Se f é diferenciável em p, então f é contínua em p.

Derivada e crescimento

Proposição

Se f é diferenciável em p e $f'(p) > 0$, então existe $\delta > 0$ pequeno tal que para todo $x \in (p - \delta, p)$, $f(x) < f(p)$, e se $x \in (p, p + \delta)$, então $f(p) < f(x)$.

Proposição

Seja $f \colon I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo aberto I. Suponha que existe $c \in I$ tal que $f(c) \geq f(x)$ ($f(c) \leq f(x)$) para todo $x \in I$. Se f é diferenciável em c, então $f'(c) = 0$.

Esta proposição diz-nos que para encontrar os extremos relativos de uma f diferenciável num intervalo aberto I, nos temos que procurar os zeros da função f' em I.

Tabela de derivadas

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$f \circ g$	$(f' \circ g) \cdot g'$

Convexidade e concavidade

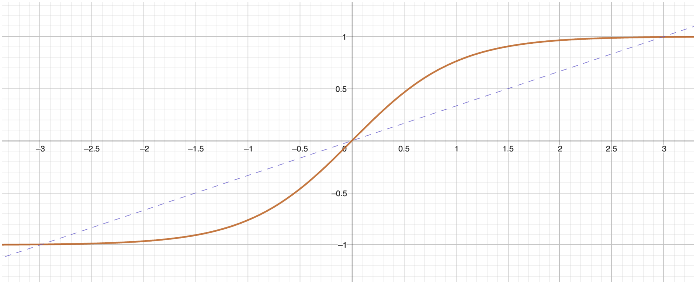
A convexidade de uma função é uma forma de compreender como o gráfico de uma função se curva. A convexidade é uma propriedade global de um grafo num intervalo: $f\colon I \to \mathbb{R}$ é convexa em I se e só se

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \qquad \forall\, x < y \in I\,, \quad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

Convexidade e concavidade

A convexidade de uma função é uma forma de compreender como o gráfico de uma função se curva. A convexidade é uma propriedade global de um grafo num intervalo: $f\colon I \to \mathbb{R}$ é convexa em I se e só se

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \qquad \forall\, x < y \in I\,, \quad \forall\, t \in [0,1]\,.$$



Curvatura

A convexidade tem um análogo local: a curvatura. Esta é calculada através da segunda derivada: se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, então f é côncava em I; se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então f é convexa em I.

Proposição

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ diferenciável, com $f'(p) = 0$ para um $p \in I$. Se $f''(p) > 0$, p é um mínimo relativo de f, se $f''(p) < 0$, p é um máximo relativo de f.

Zeros de uma função

O conjunto de zeros de uma função f é o conjunto

$$Z(f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \colon \ f(x) = 0\}$$

Proposição

1. $Z(f \cdot g) = Z(f) \cup Z(g)$.
2. $Z(e^x) = \varnothing$
3. $Z(\log) = \{1\}$
4. $Z(\sin) = \pi\mathbb{Z} = \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$
5. $Z(\cos) = \pi\mathbb{Z} - \frac{\pi}{2} = \{k\pi - \frac{\pi}{2} \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

teorema do valor intermediário

Teorema

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em todo $[a,b]$. Se $f(a) \leq f(b)$, então para todo $f(a) \leq d \leq f(b)$ existe $a \leq c \leq b$ tal que $f(c) = d$.

Corolário

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em todo $[a,b]$. Se $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ ou $f(a) \geq 0 \geq f(b)$, então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

Exercício

Estude as funções

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}|x + 1|$
2. $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}|x + 2|$
3. $h(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+3}}$
4. $m(x) = 2\sqrt{x + 4}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

e esboce um gráfico delas no intervalo $[-5, 5]$.

Regra de l'Hôpital

Sejam $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Se

1. $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} g'(x)$
2. ou $\lim_{x\to b^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g'(x)$

mas o limite $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Exercício

Calcula os seguentes limites:

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - 1}{x}$
3. $\lim_{x\to 0^+} x \log x$
4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
5. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1 - \frac{1}{2}x^2}{x^4}$