FOLHA DE PROBLEMAS 3. FUNÇÕES

Problema 1. Introduza na calculadora gráfica GeoGebra a expressão $f(x) = x^a$. Aparecerá uma barra para o parâmetro a. Mova o cursor e observe como a função varia.

Repita o mesmo com as funções $g(x) = e^{ax}$, $h(x) = \sin(ax)$, $k(x) = \frac{x^2-1}{x-a}$, e $j(x) = \frac{x-a}{x^2-1}$.

Problema 2. Esboce em gráficos distintos as seguintes funções:

1) $f(x) = x + 3$
2) $g(x) = 3x - 1$
3) $h(x) = (x-2)^2$
4) $j(x) = (x-2)^2 + 4$
5) $k(x) = x^3$
6) $l(x) = \sqrt{x}$
7) $m(x) = \sqrt{1-x^2}$
8) $n(x) = \sqrt{x^2-1}$
9) $p(x) = e^x$
10) $q(x) = e^{-x^2}$
11) $r(x) = e^{2x-6}$
12) $s(x) = \sin x$
13) $t(x) = \cos x$
14) $u(x) = \cos(4x)$
15) $v(x) = (\sin x)^2$
16) $w(x) = |x+3|$
17) $z(x) = |x+1| + |x-1|$
18) $a(x) = \log(2-x)$
19) $b(x) = x \log x$
20) $c(x) = xe^{-x^2}$
21) $d(x) = x \sin x$
22) $e(x) = x \sin(\frac{1}{x})$
23) $f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$
24) $g_2(x) = \frac{1}{x^2+1}$
25) $h_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$
26) $j_2(x) = x^3(1-x)^2 \quad , \quad x \in [0,1]$
27) $k_2(x) = x^{-1/2}(1-x)^{1/2} \quad , \quad x \in [0,1]$
28) $l_2(x) = x^{-1}(1-x)^{-1} \quad , \quad x \in [0,1]$
29) $m_2(x) = \frac{-x^2+5x-6}{x-2}$

Depois de representadas, use a calculadora gráfica GeoGebra para verificar se estão corretamente representadas. Recomenda-se substituir as constantes nessas funções por parâmetros e, em seguida, varie-los para compreender como essas funções mudam.

Problema 3. Estude as propriedades da função $f(x) = x + \sin(x)$ e esboce um gráfico dela.

Problema 4. A função de densidade de uma distribuição normal é uma função gaussiana com parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ (esperança e mediana), e $\sigma > 0$ (desvio padrão):

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \qquad x \in \mathbb{R} \; .$$

Represente num único gráfico gráficos aproximados da função gaussiana com os seguintes pares de parâmetros (μ, σ):

$$(0,1) \qquad (0,\tfrac{1}{2}) \qquad (0,\tfrac{1}{5}) \qquad (1,\tfrac{1}{2}) \qquad (4,\tfrac{1}{2}) \; .$$

Use o GeoGebra para isso.

Problema 4. A função de densidade de uma distribuição beta é uma função com parâmetros $\alpha > 0$, e $\beta > 0$:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \ , \qquad x \in (0,1) \ .$$

Represente num único gráfico gráficos aproximados da função de densidade de uma distribuição beta com os seguintes pares de parâmetros (α,β):

$$(1,1) \qquad (1,2) \qquad (2,2) \qquad (2,10) \qquad (\tfrac{1}{2},10) \qquad (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) \qquad (\tfrac{1}{3},3) \ .$$

Use o GeoGebra para isso.

Problema 5. Encontre os valores de a e b para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi + x^2\frac{\pi}{2}) & x \leq 3 \\ a + bx & x > 3 \end{cases}$$

seja continua e diferenciável en 3.

Problema 6. Prova que se f é diferenciável em p, então f é continua em p. Encontra uma função que prove o contrario

Problema 7. Diz-se que uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ é Lipschitz no intervalo I se e só se existe $L > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x,y) \qquad \forall \ x, y \in I \ .$$

Provar que f é continua para todo $c \in I$ se f é Lipschitz em I.

Observe que $f(x) = |x|$ é Lipschitz mas não é diferenciável em 0.

Problema 8. Diz-se que uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I se e só se

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \qquad \forall \ x < y \in I \ , \quad \forall \ t \in [0,1] \ .$$

Provar que f é continua para todo $c \in I$ se f é convexa em I.

Observe que $f(x) = |x|$ é convexa mas não é diferenciável em 0.

Problema 9. [Difícil] (A função de Thomae). Considere a seguinte função definida em $\mathbb{R}$.

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ para certos } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ coprimos} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Provar que T é continua nos irracionais $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mas não é continua nos racionais $\mathbb{Q}$.

Problema 10. [Difícil] (Teorema do ponto fixo) Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função continua. Suponha que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$ (em outras palavras, $f\colon [0,1] \to [0,1]$). Demonstre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

Problema 11. [Difícil] Provar que se $f\colon I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em I e $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, então f é constante.