Funções

Análise, a arte de limitar e de aproximar

Santiago Verdasco Ramos

santiago.verdasco@upm.es

7-25 de agosto de 2025

Sucessões de funções

Sucessão de funções

Definição

Una *sucessão de funções* é uma coleção de funções definidas num mesmo intervalo e numa determinada ordem.
Formalmente, uma sucessão de funções no intervalo $[a, b]$ é una função $f : \mathbb{N} \to \{\varphi :: [a, b] \to \mathbb{R}\}$. Escrevemos $(f_n)_n$ para denotar uma sucessão com termo geral $f(n) = f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Pode-se pensar que uma sucessão de funções num intervalo $[a, b]$ é uma coleção de sucessões de números reais que dependem de um parâmetro $x \in [a, b]$. Por exemplo,

$$f_n(x) = x^n \,, \qquad x \in [0, 2] \,.$$

Exemplo I

Exemplo

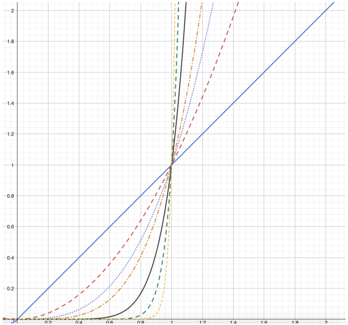
$$f_n(x) = x^n \,, \qquad x \in [0,2] \,.$$

Para $x \in [0,2]$ fixo, calcula $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Exemplo

$$f_n(x) = x^n \,, \qquad x \in [0, 2] \,.$$

Para $x \in [0, 2]$ fixo, calcula $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.



Exemplo II

Exemplo

$$g_n(x) = \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}}\ , \qquad x \in \mathbb{R}\ .$$

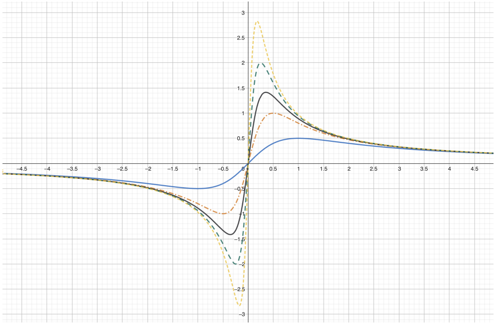
Para $x \in \mathbb{R}$ fixo, calcula $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$.

Exemplo II

Exemplo

$$g_n(x) = \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Para $x \in \mathbb{R}$ fixo, calcula $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$.



Exemplo III

Exemplo

$$h_n(x) = \frac{1}{x+n}\,, \qquad x \in (0,\infty)\ .$$

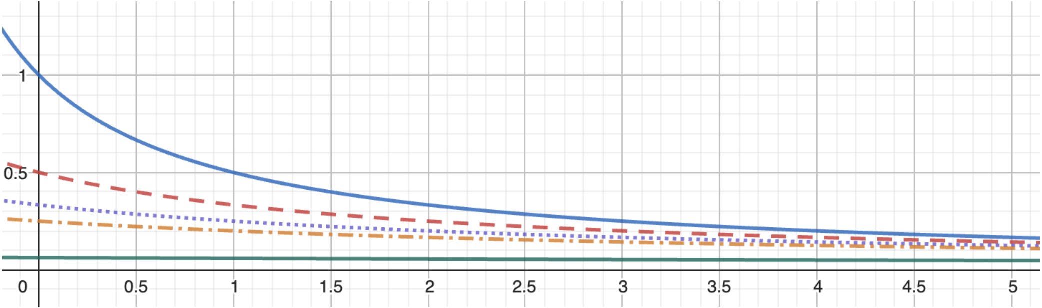
Para $x \in (0,\infty)$ fixo, calcula $\lim_{n\to\infty} h_n(x)$.

Exemplo III

Exemplo

$$h_n(x) = \frac{1}{x+n}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

Para $x \in (0,\infty)$ fixo, calcula $\lim_{n\to\infty} h_n(x)$.



Conjunto da funções continuas

Que uma função f seja contínua num intervalo $[a, b]$ é uma propriedade adicional da função f. Por isso, definimos o conjunto de funções que possuem essa propriedade: $\mathcal{C}([a, b])$.

Conjunto da funções continuas

Que uma função f seja contínua num intervalo $[a, b]$ é uma propriedade adicional da função f. Por isso, definimos o conjunto de funções que possuem essa propriedade: $\mathcal{C}([a, b])$.
O nosso objetivo é entender como essa propriedade se comporta com os limites das sucessões. Se tivermos uma sucessão de funções contínuas em $[a, b]$, então o seu limite também é uma função contínua em $[a, b]$? Em outras palavras, usando sucessões, podemos escapar do conjunto de funções contínuas.

Comparação com $\mathbb{Q}$

Quando estudávamos as sucessões de números reais, vimos que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ não era completo, porque havia sucessões de números racionais que convergiam para um número irracional.

Comparação com $\mathbb{Q}$

Quando estudávamos as sucessões de números reais, vimos que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ não era completo, porque havia sucessões de números racionais que convergiam para um número irracional. Por exemplo

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) & n \geq 1 \end{cases}$$

é uma sucessão decrescente e limitada inferiormente, então convergente.

Comparação com $\mathbb{Q}$

Quando estudávamos as sucessões de números reais, vimos que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ não era completo, porque havia sucessões de números racionais que convergiam para um número irracional. Por exemplo

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

é uma sucessão decrescente e limitada inferiormente, então convergente. Mas o limite da sucessão, ℓ, verifica

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \implies \ell = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,.$$

Mas $\mathbb{R}$ é completo: toda sucessão convergente de números reais converge a um número real.

Convergência de funções

Mas... o que queremos dizer com uma sucessão de funções $(f_n)_n$ ser convergente? Ou seja, o que queremos que a expressão

$$\lim_{n \to \infty} f_n$$

signifique?

Convergência de funções

Mas... o que queremos dizer com uma sucessão de funções $(f_n)_n$ ser convergente? Ou seja, o que queremos que a expressão

$$\lim_{n\to\infty} f_n$$

signifique?
Se pensarmos em sucessões de funções $(f_n)_n$ como coleções de sucessões que dependem de um parâmetro $x \in I$, a definição natural neste caso é

U

ma sucessõa de funções $(f_n)_n$ no intervalo I converge pontualmente para a função F se e só se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x) \qquad \text{para todo } x \in I \text{ fixo.}$$

Exemplo I

Seja

$$f_n(x) = x^n\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

O limite pontual de $(f_n)_n$ é

$$F(x) =$$

Exemplo I

Seja

$$f_n(x) = x^n\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

O limite pontual de $(f_n)_n$ é

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Convergência pontual de funções e continuidade

Exemplo I

Seja

$$f_n(x) = x^n\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

O limite pontual de $(f_n)_n$ é

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n$$

Convergência pontual de funções e continuidade

Exemplo I

Seja

$$f_n(x) = x^n \,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

O limite pontual de $(f_n)_n$ é

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Convergência pontual de funções e continuidade

Exemplo I

Seja

$$f_n(x) = x^n \,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

O limite pontual de $(f_n)_n$ é

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Perguntas

1. São f_n contínua no intervalo $[0,1]$?

Convergência pontual de funções e continuidade

Exemplo I

Seja

$$f_n(x) = x^n \,, \qquad x \in [0,1] \,.$$

O limite pontual de $(f_n)_n$ é

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Perguntas

1. São f_n contínua no intervalo $[0,1]$?
2. É o limite pontual F contínua no intervalo $[0,1]$?

Convergência pontual de funções e continuidade

Exemplo I

Seja

$$f_n(x) = x^n \, , \qquad x \in [0,1] \, .$$

O limite pontual de $(f_n)_n$ é

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Perguntas

1. São f_n contínua no intervalo $[0,1]$?
2. É o limite pontual F contínua no intervalo $[0,1]$?
3. Como é que conseguimos aproximar-nos de uma função não contínua?

Convergência pontual de funções e continuidade

Exemplo I

Seja
$$f_n(x) = x^n\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

O limite pontual de $(f_n)_n$ é

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Perguntas

1. São f_n contínua no intervalo $[0,1]$?
2. É o limite pontual F contínua no intervalo $[0,1]$?
3. Como é que conseguimos aproximar-nos de uma função não contínua?

Distância entre funções

Definição

Define-se a norma de uma função no intervalo I como

$$\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)| \ .$$

A distância entre duas funções f, g no intervalo I, é definida como

$$d_I(f, g) = \|f - g\|_I \ .$$

Proposição

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tem um máximo absoluto no intervalo I em $c \in I$ então $\|f\|_I = f(c)$.

Exercício

Exercício

Calcula a norma da função $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[0, 1]$, $\|f\|_{[0,\infty)}$. Calcula também $\|f\|_{(0,\infty)}$.

Exercício

Exercício

Calcula a norma da função $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[0, 1]$, $\|f\|_{[0,\infty)}$. Calcula também $\|f\|_{(0,\infty)}$.

Exercício

Calcula a distância entre as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$, $d_{[0,1]}(f, g)$. Calcula também $d_{[-1,1]}(f, g)$.

Exercício

Exercício

Calcula a norma da função $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[0,1]$, $\|f\|_{[0,\infty)}$. Calcula também $\|f\|_{(0,\infty)}$.

Exercício

Calcula a distância entre as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$, $d_{[0,1]}(f,g)$. Calcula também $d_{[-1,1]}(f,g)$.

Exercício

1. Se $g(x) = xe^{-x}$, calcula $\|g\|_{(0,\infty)}$
2. Se $h(x) = x^2e^{-x}$, calcula $\|h\|_{(0,\infty)}$

No exemplo anterior, o limite pontual estava muito longe dos elementos da sucessão:

$$d_{[0,1]}(f_n, F) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - F(x)| = \max\left\{ \sup_{x\in[0,1)} x^n \, , \, 0 \right\} = 1 \, .$$

Nós usamos que

$$f_n(x) - F(x) = \begin{cases} x^n - 0 = x^n & \text{se } x \in [0,1) \\ 1^n - 1 = 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Convergência uniforme

Definição

Se $(f_n)_n$ é uma sucessão de funções contínuas no intervalo $[a, b]$, e F é uma função contínua em $[a, b]$ também, diz-se que a sucessão $(f_n)_n$ *converge uniformemente* para F no $[a, b]$ se e só se

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\,,, \qquad d_{[a,b]}(f_n, F) \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon\ .$$

Convergência uniforme

Definição

Se $(f_n)_n$ é uma sucessão de funções contínuas no intervalo $[a, b]$, e F é uma função contínua em $[a, b]$ também, diz-se que a sucessão $(f_n)_n$ *converge uniformemente* para F no $[a, b]$ se e só se

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\,,, \qquad d_{[a,b]}(f_n, F) \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon\ .$$

Exemplo III

$$h_n(x) = \frac{1}{x+n}\,, \qquad x \in [0, 10]\ .$$

Convergência uniforme

Definição

Se $(f_n)_n$ é uma sucessão de funções contínuas no intervalo $[a, b]$, e F é uma função contínua em $[a, b]$ também, diz-se que a sucessão *$(f_n)_n$ converge uniformemente* para F no $[a, b]$ se e só se

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\,,, \qquad d_{[a,b]}(f_n, F) \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon\ .$$

Exemplo III

$$h_n(x) = \frac{1}{x+n}\,, \qquad x \in [0, 10]\ .$$

1. Qual é o limite pontual H desta sucessão?

Convergência uniforme

Definição

Se $(f_n)_n$ é uma sucessão de funções contínuas no intervalo $[a, b]$, e F é uma função contínua em $[a, b]$ também, diz-se que a sucessão *$(f_n)_n$ converge uniformemente* para F no $[a, b]$ se e só se

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\,,, \qquad d_{[a,b]}(f_n, F) \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon\ .$$

Exemplo III

$$h_n(x) = \frac{1}{x+n}\,, \qquad x \in [0, 10]\ .$$

1. Qual é o limite pontual H desta sucessão?
2. É certo que $(h_n)_n$ converge uniformemente para H?

Propriedades da convergência uniforme

Proposição

1. Se a sucessão $(f_n)_n$ converge uniformemente para F no intervalo I, então $(f_n)_n$ converge pontualmente para F em I.
2. Se $(f_n)_n$ converge uniformemente para F em I e f_n é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$, então F é contínua em I.

Séries de funções

Séries de funcões

Uma série de funções é uma soma infinita de funções. Como qualquer sucessão, a convergência desta depende da convergência da sucessão de somas parciais.

Definição

Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente num intervalo I se e só se a sucessão de somas parciais $(\sum_{n=1}^{k} f_n)_k$ converge pontualmente em I quando $k \to \infty$.
Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente num intervalo I se e só se a sucessão de somas parciais $(\sum_{n=1}^{k} f_n)_k$ converge uniformemente em I quando $k \to \infty$.

Critérios de convergência pontual

Para provar que una série funções converge pontualmente em I, qualquer um dos critérios estudados anteriormente pode ser aplicado, tendo em conta que o sinal da função pode mudar de acordo com o ponto x (além do índice n).

Exemplo

A série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, com

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$$

converge pontualmente em $[0, 10]$ graças ao critério de convergência de séries alternadas.

Critérios de convergência pontual

Para provar que una série funções converge pontualmente em I, qualquer um dos critérios estudados anteriormente pode ser aplicado, tendo em conta que o sinal da função pode mudar de acordo com o ponto x (além do índice n).

Exemplo

A série $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$, com

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\log(x+n)}$$

converge pontualmente em $[0, 10]$ graças ao critério de convergência de séries alternadas.

Critérios de convergência uniforme

Prover que uma série de funções converge uniformemente em I é mais complicado en geral, no entanto, existe um critério muito útil para isso.

Teste M de Weierstrass

Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções num intervalo I. Se existe uma sucessão do números reais positivos $(M_n)_n$ tal que $\|f_n\|_I \leq M_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, então

$$\text{a série} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{convêrge uniformemente em } I.$$

O teste M de Weierstrass prova a convergência absoluta da série de maneira uniforme em todo o intervalo I através do teste de comparação!

Propriedades da convergência uniforme

Proposição

1. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para F no intervalo I, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente para F em I.
2. Se $(f_n)_n$ converge uniformemente para F em I e f_n é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$, então F é contínua em I.

Exercício

Exercício

Provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ é uniformemente convergente no intervalo $[0, 1/2]$. É uniformemente convergente em $[0, 1]$?

Exercício

Provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin(nx)$ é uniformemente convergente no intervalo $[-100, 100]$.

Exercício

Provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é uniformemente convergente no intervalo $[0, 1/2]$. É uniformemente convergente em $[0, 1]$?

Troca de sinal de série e derivada

Teorema

Seja $(f_n)_n$ una sucessão de funções contínuas no intervalo I, tales que f_n' são contínuas em I também. Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ convergen absolutamente em I, então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right](a) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n\right](a) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(a)$$

Troca de sinal de série e integral

Teorema

Seja $(f_n)_n$ una sucessão de funções contínuas e positivas no intervalo $[a, b]$. Então

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \right) .$$

Troca de sinal de série e integral

Teorema

Seja $(f_n)_n$ una sucessão de funções contínuas (não necessariamente positivas). Se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b |f_n(x)| \,\mathrm{d}x \right)$$

é convergente, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x \right) = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] \mathrm{d}x$$

Séries de Taylor

Polinómio de Taylor

Polinómio de Taylor

Dada uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável e um ponto $c \in (a, b)$, define-se o polinómio de Taylor de f de ordem m em c como o polinómio P_m de ordem no máximo m que satisfaz

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \quad \exists\, \delta = \delta(c, m, \varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad d(f(x), P_m(x)) \leq \varepsilon |x - c|^m \qquad \forall\, d(x, c) \leq \delta\,.$$

Observação

O polinómio de Taylor de f de ordem 0 em c é $P_0(x) = f(c)$.

Observação

O polinómio de Taylor de f de ordem 1 em c é $P_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$.

Teorema de Taylor

Dada uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável e um ponto $c \in (a, b)$, o polinómio de Taylor de f de ordem m em c é

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^m$$

Série de Taylor

Série de Taylor

A série de Taylor de f em c é o limite pontual dos polinomios de Taylor de f em c quando o ordem m tende para o infinito:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Observação

Como o intervalo em que o polinómio aproxima a função depende de m, é possível que, quando $m \to \infty$, o intervalo cresça até ser todo $\mathbb{R}$ ou se reduza ao ponto c.
Em outras palavras: é possível que a série de Taylor coincida com a função original em todo o $\mathbb{R}$, ou que coincida apenas no ponto c.

Agora queremos calculamos a série de Taylor de $E(x) = e^x$ centrada em $c = 0$.
Passo 1. Calculamos as derivadas $E^{(n)}$ para todo $n \geq 1$. Para isso, é necessário utilizar indução. Afirmamos que $E^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \geq 1$.
Passo base. Para $n = 1$ temos

$$E^{(1)}(x) = E'(x) = (e^x)' = e^x \ .$$

Passo indução. Se $E^{(n)}(x) = e^x$, queremos provar que $E^{(n+1)}(x) = e^x$.

$$E^{(n+1)}(x) = \left(E^{(n)}(x)\right)' = (e^x)' = e^x \ .$$

Série de Taylor de $E(x) = e^x$

Passo 2. Avaliamos $E^{(n)}(x)$ no ponto $c = 0$.

$$E^{(n)}(0) = e^0 = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Passo 3. Formamos a série de Taylor:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E^{(n)}(c)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Série de Taylor de $E(x) = e^x$

Por último, calculamos o radio de convergência da série de Taylor, em outras palavras, calcule o máximo $R > 0$ tal que a serie de Taylor de E converge uniformemente se $|x - c| \leq r$ para qualquer $r < R$.
Gostaríamos de provar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ converge uniformemente em o intervalo $[-r, r]$ ($|x| \leq r$). Para isso, aplicamos o teste M de Weierstrass:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} x^n \right\|_{[-r,r]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$$

Esta última série é convergente por o teste da ração, para qualquer que seja o número $r > 0$. Isso significa que podemos tomar $R = \infty$, e este é o radio de convergência.

Agora queremos calculamos a série de Taylor de $C(x) = \cos x$ centrada em $c = 0$.
Passo 1. Calculamos as derivadas $C^{(n)}$ para todo $n \geq 1$. A indução neste caso é mais complexa. Afirmamos que

$$\begin{cases} E^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x & \forall\, n \geq 1 \\ E^{(2n-1)}(x) = (-1)^n \sin x & \forall\, n \geq 1 \end{cases}$$

Tal como enunciámos a fórmula para as derivadas de n, temos que fazer duas provas por indução: uma para as derivadas de ordem par e outra para as derivadas de ordem ímpar.

Série de Taylor de $C(x) = \cos x$

Derivadas de ordem par. *Passo base.*

$$C^{(2)}(x) = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x\ .$$

Passo indução. Se $C^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$, queremos provar que $C^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \cos x$.

$$C^{(2n+2)}(x) = \left(C^{(2n)}(x)\right)'' = ((-1)^n \cos x)'' = (-1)^n(-\sin x)' = (-1)^n(-\cos x) = (-1)^{n+1} \cos x\ .$$

A demonstração para as derivadas de ordem ímpar é análoga.

Série de Taylor de $C(x) = \cos x$

Passo 2. Avaliamos $C^{(n)}(x)$ no ponto $c = 0$.

$$\begin{cases} C^{(2n)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n & \text{também para } n = 0 \\ C^{(2n-1)}(0) = (-1)^n \sin 0 = 0 \end{cases}$$

Passo 3. Formamos a série de Taylor:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{(n)}(c)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + \frac{C^{(2n-1)}(0)}{n!}x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

Série de Taylor de $C(x) = \cos x$

Por último, calculamos o radio de convergência da série de Taylor de C, Gostaríamos de provar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ converge uniformemente em o intervalo $[-r, r]$ ($|x| \leq r$). Para isso, aplicamos o teste M de Weierstrass:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right\|_{[-r,r]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!}$$

Esta última série é convergente por o teste da ração, para qualquer que seja o número $r > 0$. Isso significa que podemos tomar $R = \infty$, e este é o radio de convergência.

Radio de convergência

Em geral, o radio de convergência da uma série de potencias é é calculado utilizando o teste da raiz. Se

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n \; ,$$

esta série é convergente se

$$1 > \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x - c)^n|} = |x - c| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Portanto, o radio de convergência é

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \; .$$

Radio de convergência

Para calcular

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \, ,$$

é útil conhecer que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1 \qquad \forall\, k \geq 1 \, .$$

Séries de Fourier

Série de Fourier

Definição

Uma série de Fourier é uma série de funções no intervalo $[-\pi, \pi]$ com a seguinte forma:

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

para certos sucessões de números reais $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$.

Para as séries de Taylor, as funções elementares escolhidas eram os monômios x^n ($(x-c)^m$ em geral). Por que tomamos como funções elementares $(\cos(nx))_n$ e $(\sin(nx))_n$?

Integrais de seno e cosseno

Proposição

Para todos números inteiros $m, n \geq 1$ se cumpre:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Série de Fourier de f

Dada uma função contínua f no intervalo $[-\pi, \pi]$, define-se a série de Fourier de f como a série

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

onde os coeficientes são dados pelas fórmulas

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

Coeficientes de Fourier de S

Se S é uma função contínua em $[-\pi, \pi]$, da forma

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) ,$$

Portanto, desde que possamos trocar o sinal integral e o sinal da série, podemos calcular os coeficientes da série. Ilustramos isto calculando o coeficiente a_k

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)\right] \cos(kx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(kx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \cos\right.$$

$$= a_k \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kx))^2\,\mathrm{d}x = \pi a_k$$

Série de Fourier de $f(x) = x$

Para calcular a série de Fourier de uma função, só temos que calcular os coeficientes. Para isso, se a função tem alguma simetria, como ser par o ímpar, o calculo dos coeficientes é mais simple.
Neste caso, $f(x) = x$, f tem simetria ímpar, então os coeficientes a_k todos eles são 0 porque o integrando é ímpar:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \, \mathrm{d}x = 0 \, , \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) \, \mathrm{d}x = 0$$

Série de Fourier de $f(x) = x$

Entretanto, para os coeficientes b_n, o integrando é par e podemos simplificar um pouco a integral:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[x(-\tfrac{1}{n}\cos(nx))\right]_{x=0}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\tfrac{1}{n}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\pi}{n}\cos(\pi x) + \frac{2}{\pi}\left[\tfrac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_{x=0}^{\pi} \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

A série de Fourier de $f(x) = x$ é portanto

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

Observe que esta série é formada apenas por funções ímpares, já que f também é ímpar. Além disso, observe que a série não pode convergir uniformemente no intervalo $[-\pi, \pi]$, pois nas extremidades desse intervalo a série é zero.