Cálculo de áreas. Integrais

Análise, a arte de limitar e de aproximar

Santiago Verdasco Ramos

santiago.verdasco@upm.es

7-25 de agosto de 2025

Cálculo de áreas. Definição

Definição

A área sob o gráfico de uma função f num intervalo $[a, b]$ É representado pela expressão

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Diz-se que f é integrável se e só se a quantidade $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ está bem definida.

Cálculo de áreas. Definição

Definição

A área sob o gráfico de uma função f num intervalo $[a, b]$ É representado pela expressão

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Diz-se que f é integrável se e só se a quantidade $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ está bem definida.

Quando é que a área está bem definida? Quais funções são integráveis?

Definição

As funções constantes são integráveis: para todo $c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a) \ .$$

Como são calculadas

Propriedades da integral

1. $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}.$

Como são calculadas

Propriedades da integral

1. $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}.$
2. $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Como são calculadas

Propriedades da integral

1. $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$.
2. $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Se $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{N-1} < c_N = b$, então

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Algumas funções integráveis

Corolário

As funções constantes por troços são integráveis.

Algumas funções integráveis

Corolário

As funções constantes por troços são integráveis.

Corolário

As funções contínuas (por troços) são integráveis.

Ideia da demonstração. Dividimos o intervalo I em subintervalos pequenos de comprimento no máximo $\delta > 0$. Em cada intervalo, aproximamos a função por uma constante, uma vez que é contínua. Obtemos uma região formada por muitos retângulos finos, cuja área podemos calcular e que é muito próxima da integral de f. Tomando $\delta \to 0$, obtemos o resultado.

Algumas funções integráveis

Corolário

As funções constantes por troços são integráveis.

Corolário

As funções contínuas (por troços) são integráveis.

Ideia da demonstração. Dividimos o intervalo I em subintervalos pequenos de comprimento no máximo $\delta > 0$. Em cada intervalo, aproximamos a função por uma constante, uma vez que é contínua. Obtemos uma região formada por muitos retângulos finos, cuja área podemos calcular e que é muito próxima da integral de f. Tomando $\delta \to 0$, obtemos o resultado.

Portanto, em geral, as integrais são o limite de uma soma!

Como são calculadas II

Teorema fundamental do cálculo II

Seja $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em (a,b). Se F' é integrável, então

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Como são calculadas II

Teorema fundamental do cálculo II

Seja $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em (a,b). Se F' é integrável, então

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\ .$$

Teorema fundamental do cálculo I

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$. Seja $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Então F é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) com $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Como são calculadas III

Integração por partes

Graças à regra de Leibniz para o produto de funções diferenciáveis, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, se verifica

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f \cdot g)'(x) - f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Como são calculadas III

Integração por partes

Graças à regra de Leibniz para o produto de funções diferenciáveis, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, se verifica

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[(f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a)\Big] - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Como são calculadas III

Integração por partes

Graças à regra de Leibniz para o produto de funções diferenciáveis, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, se verifica

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[(f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a)\Big] - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Integração por substituição $u = g(x)$

Se $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável com $g'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \ .$$