FOLHA DE PROBLEMAS 4. INTEGRAIS

Problema 1. Seja $f\colon [-L,L] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e par $f(-x) = f(x)$. Provar

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Problema 2. Seja $f\colon [-L,L] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar $f(-x) = -f(x)$. Provar

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ .$$

Problema 3. [Difícil] Seja $f\colon [-L,L] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ (todas as derivadas de f são diferenciáveis) e com suporte compacto (existe $M > 0$ tal que $f(x) = 0$ se $|x| \geq 0$). Provar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)H_0(x)\,\mathrm{d}x = f(0) \qquad \text{onde} \quad H_0(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Problema 4. [Difícil] Seja $f\colon [-L,L] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ (todas as derivadas de f são diferenciáveis) e com suporte compacto (existe $M > 0$ tal que $f(x) = 0$ se $|x| \geq 0$). Provar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\tfrac{1}{2}|x|\,\mathrm{d}x = f(0) \ .$$

Problema 5. Calcule as seguintes integrais:

(1) $\int_0^x t\sin t\,\mathrm{d}t$
(2) $\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t$
(3) $\int_0^x te^{-t}\,\mathrm{d}t$
(4) $\int_0^1 te^{-t}\,\mathrm{d}t$
(5) $\int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t$
(6) $\int_1^e t\ln(t)\,\mathrm{d}t$
(7) $\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$
(8) $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$
(9) $\int_1^e \ln(t)\,\mathrm{d}t$
(10) $\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
(11) $\int_0^3 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
(12) $\int_0^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
(13) $\int_0^1 te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
(14) $\int_{-1}^0 te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
(15) $\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t$
(16) $\int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{d}t$
(17) $\int_0^{2\pi} (\sin t)^2\,\mathrm{d}t$
(18) $\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
(19) $\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad n \in \mathbb{N}.$
(20) $\int_{1/n}^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad n \in \mathbb{N}.$
(21) $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$
(22) $\int_1^n \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad n \in \mathbb{N}.$
(23) $\int_{1/n}^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad n \in \mathbb{N}.$
(24) $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
(25) $\int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad n \in \mathbb{N}.$
(26) $\int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad n \in \mathbb{N}.$

Problema 6. Calcule a área sob o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ no intervalo $[-1,1]$.

Problema 7. Calcule a área sob o gráfico da função $f(x) = e^{-\alpha x}$ no intervalo $[0,N]$ para $\alpha > 0$ e $N \in \mathbb{N}$. O que acontece quando N tende para o infinito?

Problema 8. Para cada inteiro $n \geq 0$, seja

$$f_n(x) = \int_0^x x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x \ , \qquad x \in [0,\infty) \ .$$

(1) Calcule f_0.
(2) Calcule f_{n+1} em termos de f_n.
(3) Seria capaz de calcular uma fórmula fechada para f_n?
(4) Calcule $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ para todo $n \geq 0$.