FOLHA DE PROBLEMAS 2. SÉRIES

Problema 1. Seja uma sequência $(d_k)_k$ do números inteiros entre 0 e 9, ou seja,

$$d_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Provar que a sucessão

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k}$$

converge a um número real entre 0 e 1.

Problema 2. [Difícil] Provar que para todo número natural n existe uma única sequência $(b_k)_k$, $b_k \in \{0,1\}$ tal que

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k 2^k \ .$$

Problema 3. Decida qual das seguintes séries é convergente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$
b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3}$
c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$
d. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log(n))^2}$
e. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{n-2}^{-1}$
f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n}$
g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
h. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 4^{-n}$
i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$
j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n!}$
k. $\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n \quad$ se $0 < \lambda < 1$.
l. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$
m. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(\log(n))^5}{n^2}$
n. $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)$
o. $\sum_{n=1}^{\infty} (1+r)^n (1-r)^{2n} \quad$ se $0 < r < 1$.

Problema 4. Estudar a convergência da seguinte série em função de $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!}$$

Problema 5. Provar que uma variável aleatória X com distribuição geométrica com parâmetro $p \in (0,1)$, tem momentos de todos os tipos, ou seja,

$$E[X^k] = \sum_{n=0}^{\infty} n^k 2^{-(n+1)}$$

é convergente para todo número natural k.

Problema 6. Seja X uma variável aleatória X com função massa de probabilidade

$$P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)} \qquad n \in \{1,2,3,\dots\}$$

Provar que o valor esperado de X é infinito. Provar também que a sua variância é infinita.

Problema 7. [Difícil] Calcule o valor das seguintes séries para $p \in (0,1)$ (probabilidade de acerto para distribuição geométrica X)

(1) É uma distribuição de probabilidade: $\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n p$
(2) O valor esperado: $E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-p)^n p$
(3) O segundo momento: $E[X^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(1-p)^n p$
(4) A variância: $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$

Problema 8. [Difícil] Calcule o valor das seguintes séries para $\lambda \in (0,\infty)$ (distribuição de Poisson)

(1) É uma distribuição de probabilidade: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
(2) O valor esperado: $E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
(3) O segundo momento: $E[X^2] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
(4) A variância: $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$