Sucessões

Análise, a arte de limitar e de aproximar

Santiago Verdasco Ramos

santiago.verdasco@upm.es

7 de agosto de 2025

Definição

Una *sucessão* é uma coleção de números numa determinada ordem.
Formalmente, uma sucessão de números reias é una função $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Escrivimos $(a_n)_n$ para denotar uma sucessão com termo geral $a(n) = a_n$.

Exemplos

$$a_n = 2^n - 3n^2 + \sin(n) \;, \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = n \cdot a_{n-1} \end{cases} \qquad \text{(factorial)}$$

Sucessões monótonas

Definição

Uma sucessão $(a_n)_n$ é dita *crescente* se e só se $a_{n+1} \geq a_n$ para todos $n \in \mathbb{N}$.
Uma sucessão $(a_n)_n$ é dita *decrescente* se e só se $a_{n+1} \leq a_n$ para todos $n \in \mathbb{N}$.
Uma sucessão $(a_n)_n$ é dita *monótona* se e só se $(a_n)_n$ é crescente ou decrescente.

Exemplo

A sequência com termo geral $a_n = n$ é crescente porque

$$a_{n+1} = n + 1 \geq n = a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Quando uma sequência é monótona

Proposição

Uma sequência $(a_n)_n$ é crescente se e só se:

1. $a_{n+1} - a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. $(-a_n)_n$ é decrescente.
4. $(\frac{1}{a_n})_n$ é descrecente.
5. $(f(a_n))_n$ é crescente, se f é uma função crescente no intervalo onde está contida a sucessão.

Além disso, se $a_n = f(n)$ para uma função f crescente, então $(a_n)_n$ é crescente (O facto de $(a_n)_n$ ser crescente não diz nada sobre tal f!). Se f é derivável, então podemos estudar o crescimento de f utilizando a sua derivada.

Outro exemplo

A sequência com termo geral $a_n = \sqrt{n}$ é crescente porque

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$
$$= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq 0$$

A última desigualdade deve-se ao facto de $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Outro exemplo

A sequência com termo geral $a_n = \sqrt{n}$ é crescente porque

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$
$$= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq 0$$

A última desigualdade deve-se ao facto de $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A sequência $(n^2)_n$ é crescente. Para ver isso, pegamos a sequência $a_n = n$, que é crescente e contida em $[0, \infty)$, e a função $f(x) = x^2$ que é crescente no intervalo $[0, \infty)$. Então, a sucessão $(f(a_n))_n = (n^2)_n$ é crescente.

Convergência de sequências

Para falar sobre convergência de sucessões, primeiro temos que introduzir outros conceitos.

Definição

Um subconjunto de números reais $X \subseteq \mathbb{R}$ é limitado superiormente (inferiormente) se o só se existe uma cota superior (inferior), por outras palavras, existe um número real C tal que $x \leq C$ ($x \geq C$) para todo $x \in X$.
Diz-se que X é limitado se X é limitado superior e inferiormente.

Exemplo

O conjunto $X = (-1, 5] = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 5\}$ é um conjunto limitado. 5 é uma cota superior de X, e -300 é uma cota inferior de X.
O conjunto $X = \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado porque está contido em $[-1, 2)$.

O conjunto de números naturais é ilimitado

Um conjunto diz-se ilimitado se não limitado.

Proposição

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, por outras palavras, para todo $C > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $C \leq n$.

Propriedade arquimediana

(Geral) Para todos números reais positivos x, y, existe um número natural n tal que $ny > x$.
(Particular $y = 1$) Para todo número real positivo x, existe um número natural n tal que $n > x$.

Sucessões que tendem ao infinito

Definição

Uma sucessão $(a_n)_n$ *tende ao infinito* se e só se para todo número natural $M \in \mathbb{N}$ (grande), existe um índice n_M a partir do qual $a_n \geq M$ para todo $n \geq n_M$. Escrevemos $a_n \to \infty$.

Proposição

A sequência $(a_n)_n$ com termo geral $a_n = n$ tende ao infinito.

Demonstração Para todo numero natural M, pegamos $n_M = M$ e temos para todo $n \geq n_M$

$$a_n = n \geq n_M = M$$

como queríamos ver. $\square$

Exemplos de sucessões que tendem ao infinito

Proposição

A sequência $(\sqrt{n})_n$ tende ao infinito.

Exemplos de sucessões que tendem ao infinito

Proposição

A sequência $(\sqrt{n})_n$ tende ao infinito.

Demonstração. Seja M um número natural arbitrário (pense que é grande). Pegamos $n_M = M^2$. Então, para todo $n \geq n_M$

$$a_n = \sqrt{n} \geq \sqrt{n_M} = \sqrt{M^2} = M \, .$$

Para esta desigualdade, utilizámos que a sucessão $(\sqrt{n})_n$ é crescente!.

Exemplos de sucessões que tendem ao infinito

Proposição

A sequência $(\sqrt{n})_n$ tende ao infinito.

Demonstração. Seja M um número natural arbitrário (pense que é grande).
Pegamos $n_M = M^2$. Então, para todo $n \geq n_M$

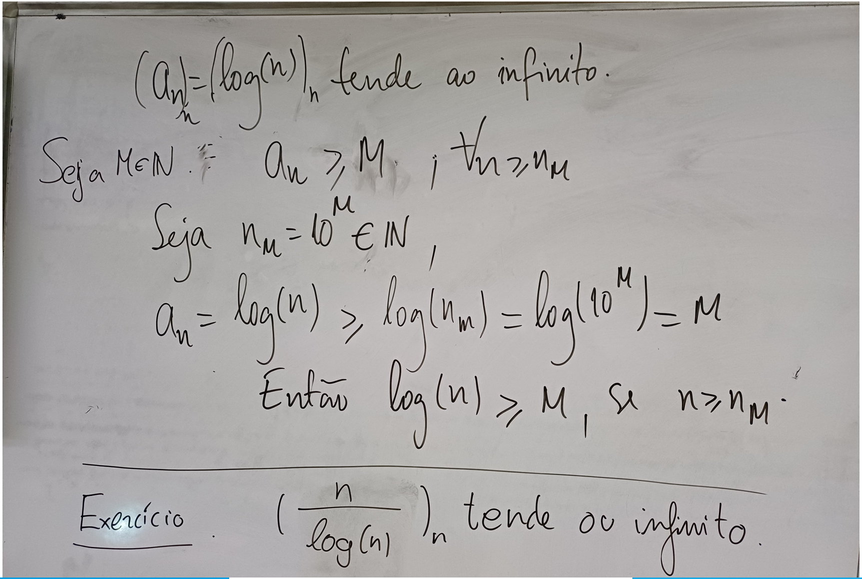
$$a_n = \sqrt{n} \geq \sqrt{n_M} = \sqrt{M^2} = M \,.$$

Para esta desigualdade, utilizámos que a sucessão $(\sqrt{n})_n$ é crescente!.

Exercício

A sequência $(\log(n))_n$ tende ao infinito.

Demonstração por Adérito no slide seguinte.


$(a_n)_n = (\log(n))_n$ tende ao infinito.
Seja $M \in \mathbb{N}$. $a_n \geq M$; $\forall n \geq n_M$
Seja $n_M = 10^M \in \mathbb{N}$,
$a_n = \log(n) \geq \log(n_M) = \log(10^M) = M$
Então $\log(n) \geq M$, se $n \geq n_M$.
Exercício. $\left(\frac{n}{\log(n)}\right)_n$ tende ao infinito.

Distância entre números reais

Para poder falar de proximidade entre números, precisamos ser capazes de dizer o quão próximos ou distantes estão dois números. Por isso, definimos uma distância entre números reais

Definição

Definimos a distância entre dois números reais x e y como o valor absoluto da sua diferença, ou seja,

$$d(x, y) = |x - y|$$

Observação

- $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$.
- Se $x \neq y$, então $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Limites de sucessões

Definição

Dada uma sucessão de números reais $(a_n)_n$, um limite de $(a_n)_n$ é um número real l tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um ordem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(a_n, l) \leq \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_\varepsilon \ .$$

$(1/n)_n$ converge a 0

Proposição

A sequência $(\frac{1}{n})_n$ tem 0 como limite.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Buscamos um ordem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a partir do qual $d(\frac{1}{n}, 0) \leq \varepsilon$ se $n \geq 0$. Para isso, tem que satisfacer-se $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, ou equivalentemente, $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Então, por a propriedade arquimediana para o número real $\frac{1}{\varepsilon}$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Então, se $n \geq n_\varepsilon$,

$$d(\tfrac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon \ ,$$

como queríamos provar. $\square$

Algumos exercícios

Provar que as sequências $(\frac{1}{\sqrt{n}})_n$ e $(\frac{1}{\log n})_n$ são decrescentes.

Exclusividade do limite

Proposição

Seja $(a_n)_n$ uma sequência de números reais. Se l e L são limites de $(a_n)_n$, então $l = L$.

Demonstração. Suponhamos que $l \neq L$. Tomemos $\varepsilon = \frac{d(l,L)}{3} > 0$.
Por ser l o limite da sucessão $(a_n)_n$, existe $n_{\varepsilon,l} \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, l) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_{\varepsilon,l}$.
Por ser L o limite da sucessão $(a_n)_n$, existe $n_{\varepsilon,L} \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, L) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_{\varepsilon,L}$.
Então, para todo $N = \max\{n_{\varepsilon,l}, n_{\varepsilon,L}\}$,

$$d(l, L) \leq d(l, a_N) + d(a_N, l) \leq \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3} d(l, L) \ ,$$

uma contradição! Assim, deve ser que $l = L$.

Exclusividade do limite

Definição

Se uma sucessão de números reais $(a_n)_n$ tem um limite l, diremos que $(a_n)_n$ é convergente e que l é **o limite** da sucessão. Escreveremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \qquad \text{ou} \qquad a_n \xrightarrow{n\to\infty} l\,.$$

Teorema

Seja uma sucessão $(a_n)_n$ que satisfaça as seguintes caraterísticas:

1. $(a_n)_n$ é crescente.
2. $(a_n)_n$ é limitada superiormente.

Então, $(a_n)_n$ é convergente.

Teorema

Seja uma sucessão $(a_n)_n$ que satisfaça as seguintes caraterísticas:

1. $(a_n)_n$ é limitada superiormente.

Então, $(a_n)_n$ tem uma subsucessão $(a_{n_k})_k$ convergente.

Uma subsucessão de uma sucessão é uma sucessão construida a partir de primeira sucessão que mantende o ordem da primeira. Formalmente, dada uma sucessão $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, uma subsucessão de a é uma sucessão $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $b = a \circ \varphi$ para uma certa função crescente $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (deslocamento do índice).

Exemplo

A sequência $(a_n)_n$ definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), & n \geq 1 \end{cases}$$

é decrescente e limitada inferiormente. Então, a sequência $(a_n)_n$ é convergente a um limite l, mas não conhecemos o que é l.
Calculemos agora o que é l. Temos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l$. Em seguida, tendo em conta os limites da definição da sucessão,

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right).$$

Então l satisfaz a igualdade $l = \frac{1}{2}(l + \frac{2}{l})$, ou seja $l^2 - 2 = 0$. Por conseguinte, $l = \sqrt{2}$ ou $l = -\sqrt{2}$, mas como os termos a_n são positivos, l tem que ser igual a $\sqrt{2}$!

O que diferencia os números reais dos números racionais?

$\mathbb{R}$ é um conjunto *completo* mas $\mathbb{Q}$ não é; os números reais completam os números racionais.

Propriedade de o majorante mais pequeno

Todo conjunto limitado superiormente (inferiormente) tem supremo (ínfimo), ou seja, uma cota superior mais pequena que o resto de cotas superiores.

O conjunto $Q = \{q \in \mathbb{Q} \colon q^2 < 2\}$ é limitado superiormente por 3, então existe $S \in \mathbb{R}$ tal que $q \leq S$ para todo $q \in Q$, mas se x é uma cota superior de Q, $S \leq x$. Isso S é $\sqrt{2}$, que não é um número racional.