Mestrando em Estatística
25 de agosto de 2025
Limite de tempo: 150 minutos

Apelido: ____________________

Nome: ____________________

As secções com a etiqueta [extra] são opcionais e valem 1 ponto extra cada, que só serão considerados se for obtida uma pontuação de 8 no resto do exame. Em qualquer dos casos, a pontuação máxima no exame é de 20 pontos.

Problema 1. [2 pontos] Ordene as seguintes sucessões de acordo com o comportamento no infinito.

$$n^2 - 3n \qquad 4^{n^2-3n} \qquad \log(n) \qquad 1 \qquad \log(n^2 - 3n) \qquad \log(\log(n)) \qquad \frac{1}{n^{3/2}} \qquad n^4 4^{-n}$$

Por exemplo, $n \lesssim n^2$ porque $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} < 1$.

Solução. Seguindo a relação de ordem dada, as sequências são ordenadas da seguinte forma:

$$n^4 4^{-n} \lesssim \frac{1}{n^{3/2}} \lesssim 1 \lesssim \log(\log(n)) \lesssim \log(n) \lesssim \log(n^2 - 3n) \lesssim n^2 - 3n \lesssim 4^{n^2-3n}$$

Problema 2. [3 pontos] Neste problema, vamos estudar o que pode acontecer quando uma série não é absolutamente convergente.

(1) Prova que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

é convergente mas não é absolutamente convergente. Use o teste de condensação.

(2) Podemos reordenar a série da seguinte forma

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right).$$

Prova que esta série também é convergente, mas não tem o mesmo limite que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

(3) [extra] Encontre uma reordenação de forma que a série tenda para o infinito.

Solução.

(1) A série é uma serie alternada. As séries alternadas $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ são convergentes se e só se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Neste caso, $a_n = \frac{-1}{n}$, que tende para 0.

No entanto, a série não é absolutamente convergente: a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^{n+1}}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente. Por teste de condensação de Cauchy,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty \ .$$

(2) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right)$$

é convergente também:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) \ . \end{aligned}$$

A convergência poderia ter sido demonstrada através da comparação com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ também.

A última igualdade prova que se $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$ não é zero, então as séries tem limites diferentes, mas esta é uma serie de termos positivos, e por tanto o limite é estritamente positivo.

(3) Já sabemos que a série de termos positivos é divergente: o teste de condensação diz-nos que, se os agruparmos em conjuntos de potências crescentes de 2, eles somam pelo menos 1/4. Então, introduzimos um dos elementos negativos no meio, que são sempre menores que 1/4 (a partir do segundo). Dessa forma, estamos somando todos os elementos, mas cada vez que somamos um grupo e o elemento negativo seguinte, somamos pelo menos $\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}$. Ficaria assim:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right) &+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{2^n} \left[\frac{1}{2^{n+1} + 2k - 1} \right] - \frac{1}{2(n+2)} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)} \right) = \infty \ . \end{aligned}$$

Problema 3. [5 pontos] Para $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+a} & -a \leq x \leq 0 \\ bx + 2 & 0 < x < 2 \\ -x^2 + cx - 5 & 2 \leq x \end{cases}$$

(1) Calcula os valores de a, b, c para que f seja contínua e tenha um máximo relativo em $x = 3$.

(2) Calcule os pontos de intersecção de f com os eixos. Esboce um pequeno gráfico de f no intervalo $[z_1, z_2]$, onde $z_1 < z_2$ são os dois zeros da função.

(3) Em seguida, calcule a área entre o eixo X e o gráfico de f no intervalo $[z_1, z_2]$.

Solução.

(1) A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Para que a função f seja contínua em 0 e em 2 também, é necessário que se cumpra que os limites laterais coincidam; em outras palavras:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \ , \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \ .$$

Estas equações são equivalente ás equações

$$\sqrt{a} = 2 \ , \qquad 2b + 2 = -1 + 2c \ .$$

Por outro lado, em torno do ponto $x = 3$, a função assume a forma $f(x) = -x^2+cx+5$, que é diferenciável. Portanto, se f tem um máximo relativo em $x = 3$, então $f'(3) = 0$. Esta equação é

$$-6 + c = 0 \ .$$

Juntando tudo, o sistema de equações tem solução única:

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 2 \\ 2b + 2 = -1 + 2c \\ -6 + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 4 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 6 \end{cases} \ .$$

A função resultante é

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & -4 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}x + 2 & 0 < x < 2 \\ -x^2 + 6x - 5 & 2 \le x \end{cases}$$

(2) O ponto de intersecção de f com o eixo Y é $(0, f(0)) = (0, 2)$. Os pontos de intersecção de f com o eixo X são pontos da forma $(z, 0)$.

$$f(z) = 0 \iff \begin{cases} \sqrt{z+4} = 0 & \text{e} \quad -4 \le z \le 0 \\ \frac{1}{2}z + 2 = 0 & \text{e} \quad 0 < z < 2 \\ -z^2 + 6z - 5 = 0 & \text{e} \quad 2 \le z \end{cases} \iff \begin{cases} z = -4 \\ z = 5 \end{cases}$$

(3) O área solicitada é $\int_{-4}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$. Para calcular esta integral, podemos dividi-la em integrais em três intervalos diferentes

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-4}^{0} \sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} (\tfrac{1}{2}x + 2)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{5} (-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\tfrac{2}{3}(x+4)^{3/2}\Big]_{-4}^{0} + \Big[\tfrac{1}{4}x^2 + 2x\Big]_{0}^{2} + \Big[-\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x\Big]_{2}^{5} \\ &= \frac{16}{3} + 5 + 9 = \frac{58}{3} \end{aligned}$$

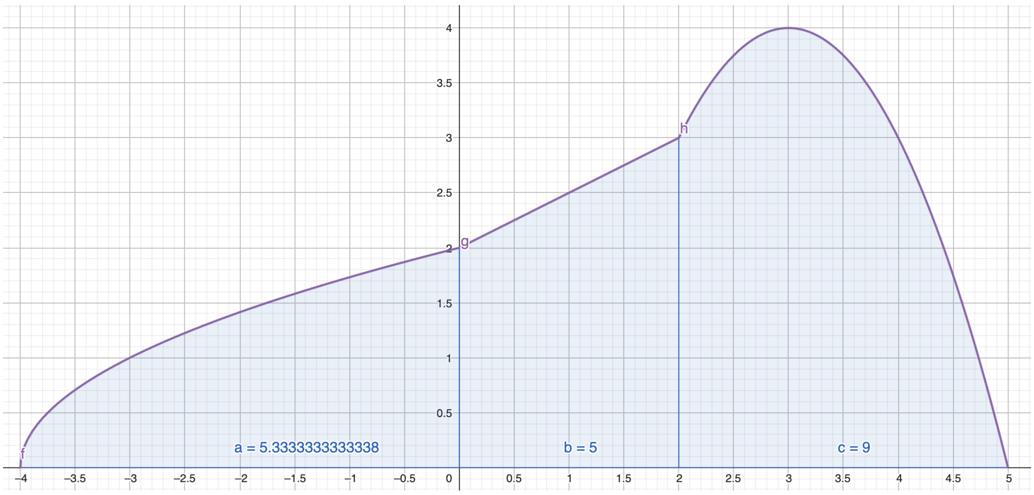

FIGURA 1. Gráfico da função f no intervalo $[-4, 5]$.

Problema 4. [6 pontos] Seja a função $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$. Pide-se:

(1) Calcule o domínio, os pontos de intersecção com os eixos, os seus intervalos de crescimento, a sua curvatura e o seu comportamento nos extremos do domínio. Depois, tendo em conta toda esta análise, esboce um gráfico desta função no intervalo $[-4, 4]$. Indicação: $\frac{1-e}{e} = -0,6$; $\frac{1}{e} \approx 0,4$; $e - 1 \approx 1,7$; $e^{3/2} - 1 \approx 3,5$.

(2) Demonstre, utilizando indução, que a derivada n-ésima de $g(x) = \ln(1+x)$ é

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} , \qquad \forall\, n \geq 1 .$$

(3) A partir da linha anterior, calcule a série de Taylor de g centrada em $x = 0$. Calcule o radio de convergência da serie, em outras palavras, calcule o máximo $R > 0$ tal que a serie de Taylor de g converge uniformemente se $|x| \leq r$, para qualquer $r < R$.

(4) A partir da linha anterior, calcule a série de Taylor de f centrada em $x = 0$. Calcule o radio de convergência da serie.

Solução.

(1) O domínio da função f é $\mathrm{Dom}(f) = (-1, \infty)$. O único ponto de intersecção de f com o eixo é $(0,0)$, pois -1 não pertence ao domínio de f. Como f é uma função suave no seu domínio, podemos estudar a suo crescimento através da sua primeira derivada,

$$f'(x) = 1 + \ln(1+x) .$$

f' tem um único zero em $\mathrm{Dom}(f)$ no ponto $z = \frac{1-e}{e}$. No intervalo $(-1, z)$, f' é negativa, portanto f é decrescente, mas no intervalo (z, ∞) a função é crescente. A segunda derivada $f''(x) = \frac{1}{1+x}$ confirma que f é convexa e que tem um mínimo global em z, onde

$$f(z) = (1 + \tfrac{1-e}{e})\ln(1 + \tfrac{1-e}{e}) = \frac{1}{e}\ln(\tfrac{1}{e}) = -\frac{1}{e} \approx -0,4 .$$

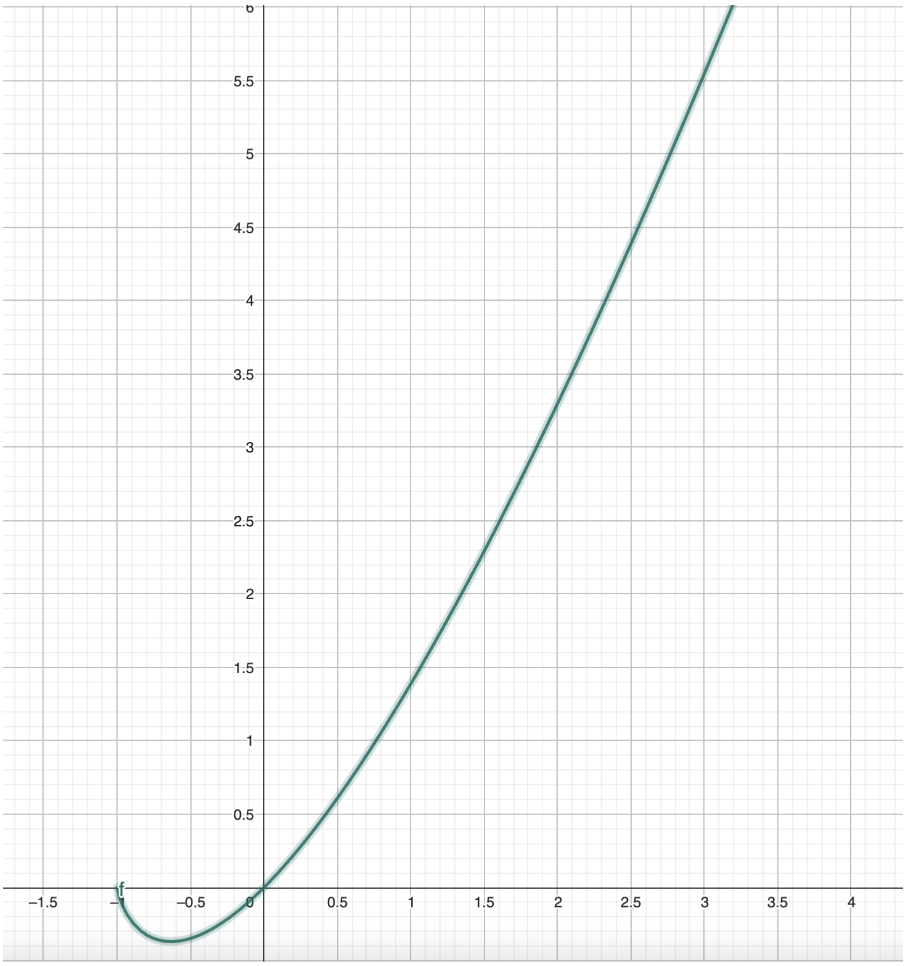

FIGURA 2. Gráfico da função f no intervalo $[-4, 4]$.

Alem disso, utilizando a regra de L'Hopital,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (1+x)\ln(1+x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{1+x}}$$
$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{(1+x)^2}} = \lim_{x\to -1^+} -(1+x) = 0 \ .$$

Agora sabemos o suficiente sobre f para desenhar o seu gráfico (figura 2).

(2) Então, provamos por indução que $g^{(n)}$ é como na afirmação do problema.

Passo base. A primeira derivada de g é

$$g^{(1)}(x) = g'(x) = \Big(\ln(1+x)\Big)' = \frac{1}{1+x} \ ,$$

que concorda com a fórmula.

Passo indução. Se supusermos agora que $g^{(n)}$ satisfaz a fórmula, então

$$g^{(n+1)}(x) = \Big(g^{(n)}(x)\Big)' = \Big(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\Big)'$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(-n)}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \ .$$

(3) A série de Taylor de g centrada em $x = 0$ então é

$$S_g(x) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

pois

$$g^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+0)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\ .$$

Usando o teste da razão a série é convergente se:

$$1 > \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|$$

então o radio de convergência é $R = 1$.

(4) A série de Taylor de $f(x) = (1+x)g(x)$ então é

$$\begin{aligned}
S_f(x) = (1+x)S_g(x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} x^n \\
&= \frac{x}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n-1} \right] x^n \\
&= \frac{x}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n
\end{aligned}$$

O teste da razão diz-nos que é convergente se $|x| < 1$, então o radio de convergência é $R = 1$.

Problema 5. [5 pontos] O objetivo deste exercício é calcular o valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(1) Seja $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Calcule os coeficientes de Fourier de f, em outras palavras:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x\ , \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x\ , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x\ .$$

(2) O teorema de Fourier afirma que as somas parciais de Fourier de f,

$$S_k[f](x) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} \Big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big]$$

convergem pontualmente para f no intervalo $[-\pi, \pi]$ quando $k \to \infty$. **Justifique** se a série de Fourier de f converge uniformemente para f em $[-\pi, \pi]$.

(3) Calcule o valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Indicação: Calcule o valor de $f(\pi)$ de duas maneiras diferentes.

(4) [extra] Calcule o valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Solução.

(1) Esta linha é um cálculo direto.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}\ .$$

Depois, como $f(x) = x^2$ é uma função par, então $x^2\cos(nx)$ é par também e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x\ .$$

Integrando por partes duas vezes,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\left[x^2\tfrac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2x}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x(-\sin(nx))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{n\pi}\left[x\tfrac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\tfrac{1}{n}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2} - \frac{4}{n^2\pi}\left[\tfrac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

Por último,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$$

porque $x^2\sin(nx)$ é ímpar.

(2) A série de Fourier de f é

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{k}\Big[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big] = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\ .$$

Para provar que esta série converge uniformemente no intervalo $[-\pi,\pi]$, usamos o teste M de Weierstrass. Para isso, calculamos as normas das funções da série no intervalo $[-\pi,\pi]$.

$$\left\|\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\right\|_{[-\pi,\pi]} = \sup_{x\in[-\pi,\pi]}\left|\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\right| \leq \sup_{x\in[-\pi,\pi]}\left|\frac{4(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{4}{n^2}\ .$$

Agora, como a série das normas é $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$, que é convergente, então a série de Fourier converge uniformemente no intervalo $[-\pi,\pi]$.

(3) O teorema de Fourier diz-nos que $f(x) = S(x)$ no intervalo $[-\pi,\pi]$. Portanto

$$\pi^2 = f(\pi) = S(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi)\ .$$

Usando que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ .$$

Resolvendo para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left[\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right] = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

(4) Da mesma forma, mas substituindo $x = 0$,

$$0 = f(0) = S(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \ .$$

Resolvendo para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$