Mestrando em Estatística **Apelido:** ____________________

25 de agosto de 2025

Limite de tempo: 150 minutos **Nome:** ____________________

As secções com a etiqueta [extra] são opcionais e valem 1 ponto extra cada, que só serão considerados se for obtida uma pontuação de 8 no resto do exame. Em qualquer dos casos, a pontuação máxima no exame é de 20 pontos.

Problema 1. [2 pontos] Ordene as seguintes sucessões de acordo com o comportamento no infinito.

$$n^2 - 3n \qquad 4^{n^2-3n} \qquad \log(n) \qquad 1 \qquad \log(n^2 - 3n) \qquad \log(\log(n)) \qquad \frac{1}{n^{3/2}} \qquad n^4 4^{-n}$$

Por exemplo, $n \lesssim n^2$ porque $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} < 1$.

Problema 2. [3 pontos] Neste problema, vamos estudar o que pode acontecer quando uma série não é absolutamente convergente.

(1) Prova que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

é convergente mas não é absolutamente convergente. Use o teste de condensação.

(2) Podemos reordenar a série da seguinte forma

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) .$$

Prova que esta série também é convergente, mas não tem o mesmo limite que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) .$$

(3) [extra] Encontre uma reordenação de forma que a série tenda para o infinito.

Problema 3. [5 pontos] Para $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+a} & a \leq x \leq 0 \\ bx + 2 & 0 < x < 2 \\ -x^2 + cx - 5 & 2 \leq x \end{cases}$$

(1) Calcula os valores de a, b, c para que f seja contínua e tenha um máximo relativo em $x = 3$.

(2) Calcule os pontos de intersecção de f com os eixos. Esboce um pequeno gráfico de f no intervalo $[z_1, z_2]$, onde $z_1 < z_2$ são os dois zeros da função.

(3) Em seguida, calcule a área entre o eixo X e o gráfico de f no intervalo $[z_1, z_2]$.

Problema 4. [6 pontos] Seja a função $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$. Pide-se:

(1) Calcule o domínio, os pontos de intersecção com os eixos, os seus intervalos de crescimento, a sua curvatura e o seu comportamento nos extremos do domínio. Depois, tendo em conta toda esta análise, esboce um gráfico desta função no intervalo $[-4, 4]$. Indicação: $\frac{1-e}{e} = -0,6$; $\frac{1}{e} \approx 0,4$; $e - 1 \approx 1,7$; $e^{3/2} - 1 \approx 3,5$.

(2) Demonstre, utilizando indução, que a derivada n-ésima de $g(x) = \ln(1+x)$ é

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} , \qquad \forall\, n \geq 1 .$$

(3) A partir da linha anterior, calcule a série de Taylor de g centrada em $x = 0$. Calcule o radio de convergência da serie, em outras palavras, calcule o máximo $R > 0$ tal que a serie de Taylor de g converge uniformemente se $|x| \leq r$, para qualquer $r < R$.

(4) A partir da linha anterior, calcule a série de Taylor de f centrada em $x = 0$. Calcule o radio de convergência da serie.

Problema 5. [5 pontos] O objetivo deste exercício é calcular o valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(1) Seja $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Calcule os coeficientes de Fourier de f, em outras palavras:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x \ , \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x \ , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x \ .$$

(2) O teorema de Fourier afirma que as somas parciais de Fourier de f,

$$S_k[f](x) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} \Big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big]$$

convergem pontualmente para f no intervalo $[-\pi, \pi]$ quando $k \to \infty$. **Justifique** se a série de Fourier de f converge uniformemente para f em $[-\pi, \pi]$.

(3) Calcule o valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Indicação: Calcule o valor de $f(\pi)$ de duas maneiras diferentes.

(4) [extra] Calcule o valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.