Mestrando em Estatística **Apelido:** ____________________

19 de agosto de 2025

Limite de tempo: 90 Minutos **Nome:** ____________________

Problema 1. [3 pontos] Provar usando indução que,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Problema 2. [5 pontos] Dada a sucessão $(a_n)_n$ com $a_n = r^n$, estudar em função de $r \in (0, \infty)$:

a) Para quais valores de r a sucessão é crescente e para quais outros a sucessão é decrescente? Dica: Analisar $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

b) Convergência da sucessão. Se for convergente, indique qual é o limite e justifique, utilizando a definição, por que converge para esse número. Se tende para o infinito, justifique utilizando a definição vista em aula. Se não for convergente, explique porquê.

c) Justifique, de forma fundamentada, se a série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ é convergente ou não. Sabe calcular o seu limite? Dica: Se $s_m = \sum_{n=0}^{m} r^n$, calcular $(1-r)s_m$ para $r \neq 1$. Estudar de outra forma o caso $r = 1$.

Problema 3. [6 pontos] Decida se as seguintes séries são convergentes ou não (fazer 3 à escolha).

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \lambda \geq 0$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

c) $\sum_{n=500}^{\infty} \frac{500}{(n-200)(n-202)}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

Indicação para a alínea d): verifique se o teste da razão é inconclusivo primeiro. Em seguida, verifique se que é convergente utilizando o teste de Raabe, em outras palavras, verifique se $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$.

Problema 4. [2 pontos] Ordene as seguintes sucessões de acordo com o comportamento no infinito.

$$n \qquad n^2 \qquad \sqrt{n - \frac{1}{n}} \qquad n\log(n) \qquad 4^{-n} \qquad \frac{1}{n^2+1}$$

Por exemplo, $n \lesssim n^2$ porque $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} < 1$.

Problema 5. [4 pontos] Esboce um gráfico aproximado de

$$f(x) = 2(2-x)\log_{17}(17 - (x-1)^2)$$

no intervalo $[-5, 5]$, distinguindo corretamente o domínio, os zeros da função, bem como os intervalos de crescimento e convexidade. Indicação: Suponha que f' é nula apenas em $x = -2$ e $x = 4$, onde $f(-2) = 6$ e $f(4) = -3$, e que f'' é nula apenas em $x = 1$. Calcule $f(1)$.

1. Soluções dos problemas

Problema 1. *Passo base* ($n = 1$). Para $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 = 1$$

e também

$$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1 \ .$$

Para $n = 1$, a igualdade é certa.

Passo de indução. Suponhamos que, para um determinado $n \in \mathbb{N}$, a (n-ésima) igualdade é certa. Queremos provar que a mesma igualdade é verdadeira para $n+1$ também (a igualdade $(n+1)$-ésima).

Usando que a igualdade n-ésima é verdadeira,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \ .$$

Aqui podemos extrair o fator comum e operar

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}(2n^2+n+6n+6) = \frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2) \ .$$

Com isso, chegamos à conclusão de que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

como queríamos ver.

Problema 2. a) O quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r^{n+1}}{r^n} = r$ indica que a sucessão é crescente se $r \in (1, \infty)$, decrescente se $r \in (0, 1)$, e constante se $r = 1$.

b) Se $r = 1$, a sucessão é constante, $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto converge para 1: para todo $\varepsilon > 0$, $d(a_n, 1) = 0 < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $r \in (0, 1)$, a sucessão é decrescente e limitada inferiormente por 0. Na verdade, ela converge para 0: para todo $\varepsilon > 0$, tomamos $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ maior o igual que $\log_r \varepsilon$ graças à propriedade arquimediana. Então, se $n \geq n_\varepsilon$, $d(a_n, 0) = r^n \leq r^{\log_r \varepsilon} = \varepsilon$.

Se $r \in (1, \infty)$, a sucessão tende ao infinito. Se fixarmos $M \in \mathbb{N}$ grande, podemos pegar $n_M \in \mathbb{N}$ maior o igual que $\log_r M$ graças à propriedade arquimediana. Então, se $n \geq n_M$, $a_n = r^n \geq r^{\log_r M} = M$.

c) Seguindo a dica, se $r \neq 1$ calculamos $(1-r)s_m$.

$$(1-r)s_m = (1-r)\sum_{n=0}^{m} r^n = (1-r) + (r - r^2) + \cdots + (r^m - r^{m+1}) = 1 - r^{m+1} \ .$$

Daqui deduzimos que

$$s_m = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} \ .$$

Agora, se $r \in (0,1)$, então $r^{m+1} \to 0$ e portanto, $s_m \to \frac{1}{1-r}$. Por outro lado, se $r \in (1,\infty)$, $r^{m+1} \to \infty$ e portanto, $s_m \to \infty$.

Se $r = 1$, então $s_m = m+1$, que tende para ao infinito.

Problema 3. a) Nos usamos o teste de razão para o termo geral $a_n = \frac{\lambda^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\lambda^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n+1} = 0 \ .$$

Portanto, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ é convergente. (Na realidade, a série converge por definição a e^{λ}).

b) Nos usamos o teste de condensação de Cauchy para o termo geral $a_n = \frac{1}{2n-1}$. Então, temos que estudar la convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2\cdot 2^n+1}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2\cdot 2^n + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 - 2^{-n}} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} = \infty \ .$$

Então, a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ é divergente.

Também se poderia ter utilizado o teste de comparação com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é divergente.

c) Nos usamos que é uma soma telescópica.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=500}^{\infty} \frac{500}{(n-200)(n-202)} &= 1000 \sum_{n=300}^{\infty} \Big(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\Big) \\
&= 1000\Big(\Big[\frac{1}{298} - \frac{1}{300}\Big] + \Big[\frac{1}{299} - \frac{1}{301}\Big] + \Big[\frac{1}{300} - \frac{1}{302}\Big] + \dots \Big) \\
&= 1000\Big(\frac{1}{298} + \frac{1}{299}\Big)
\end{aligned}$$

Também é possível verificar a convergência comparando com a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

d) Seguimos a indicação. Temos $a_n = \frac{n!}{(n+2)!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!/(n+3)!}{n!/(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = 1$$

No entanto, utilizando o teste de Raabe,

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{n+3}{n+1} - 1\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1 \ .$$

Problema 4. A ordem correta é

$$4^{-n} \lesssim \frac{1}{n^2+1} \lesssim \sqrt{n - \frac{1}{n}} \lesssim n \lesssim n\log(n) \lesssim n^2 \ .$$

Pode-se verificar que o limite entre termos consecutivos desta cadeia de desigualdades é menor que 1, até mesmo 0.

Problema 5. A função em questão é $f(x) = 2(2-x)\log_{17}(17-(x-1)^2)$.

Primeiramente, estudamos o domínio da função f dentro do intervalo $[-5,5]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f) &= [-5,5]\cap \mathrm{Dom}(2(2-x))\cap \mathrm{Dom}(\log_{17}(17-(x-1)^2))\\ &= [-5,5]\cap \mathbb{R}\cap \{x\in\mathbb{R}:\ 17-(x-1)^2>0\ \}\\ &= [-5,5]\cap(1-\sqrt{17},1+\sqrt{17})\\ &= (1-\sqrt{17},5]\ .\end{aligned}$$

A função f é uma função continua e diferenciável no intervalo $(1-\sqrt{17},5]$ por ser produto e composição de funções continuas.

Estudamos o comportamento de f nos extremos do domínio. Como f é continua en 5,

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = f(5) = 2(2-5)\log_{17}(17-4^2) = 2\cdot(-3)\log_{17}(1) = 0\ .$$

No entanto, em $1-\sqrt{17}$ a função não está definida: é preciso calcular o limite pela direita:

$$\lim_{x\to(1-\sqrt{17})^+} f(x) = \lim_{x\to(1-\sqrt{17})^+} 2(2-x)\log_{17}(17-(1-x)^2)) = 2(1+\sqrt{17})\lim_{y\to 0^+}\log_{17}(y) = -\infty\ .$$

Os zeros de f são os pontos $a\in(1-\sqrt{17},5]$ tales que $f(a)=0$.

$$f(a)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (2-a)\log_{17}(17-(a-1)^2)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}2-a=0\\ \text{ou}\\ 17-(a-1)^2=1\end{cases}$$

Então, os zeros de f são $a=2$ e as soluções à equação $(a-1)^2=16$. Em outras palavras, os zeros de f são $\{-3,2,5\}$.

Graças à indicação e ao comportamento de f nos extremos do domínio, sabemos que f é crescente em $(1-\sqrt{17},-2)$, decrescente em $(-2,4)$, e crescente em $(4,5]$. Como $f(-3)=0=f(2)$, $f(-2)=6$, e f'' tem sinal constante no intervalo $(1-\sqrt{17},1)$, necessariamente f é côncava em $(1-\sqrt{17},1)$ e f tem um máximo relativo em $x=-2$; pelo mesmo argumento, f é convexa no intervalo $(1,5)$ e tem um mínimo relativo em 4.

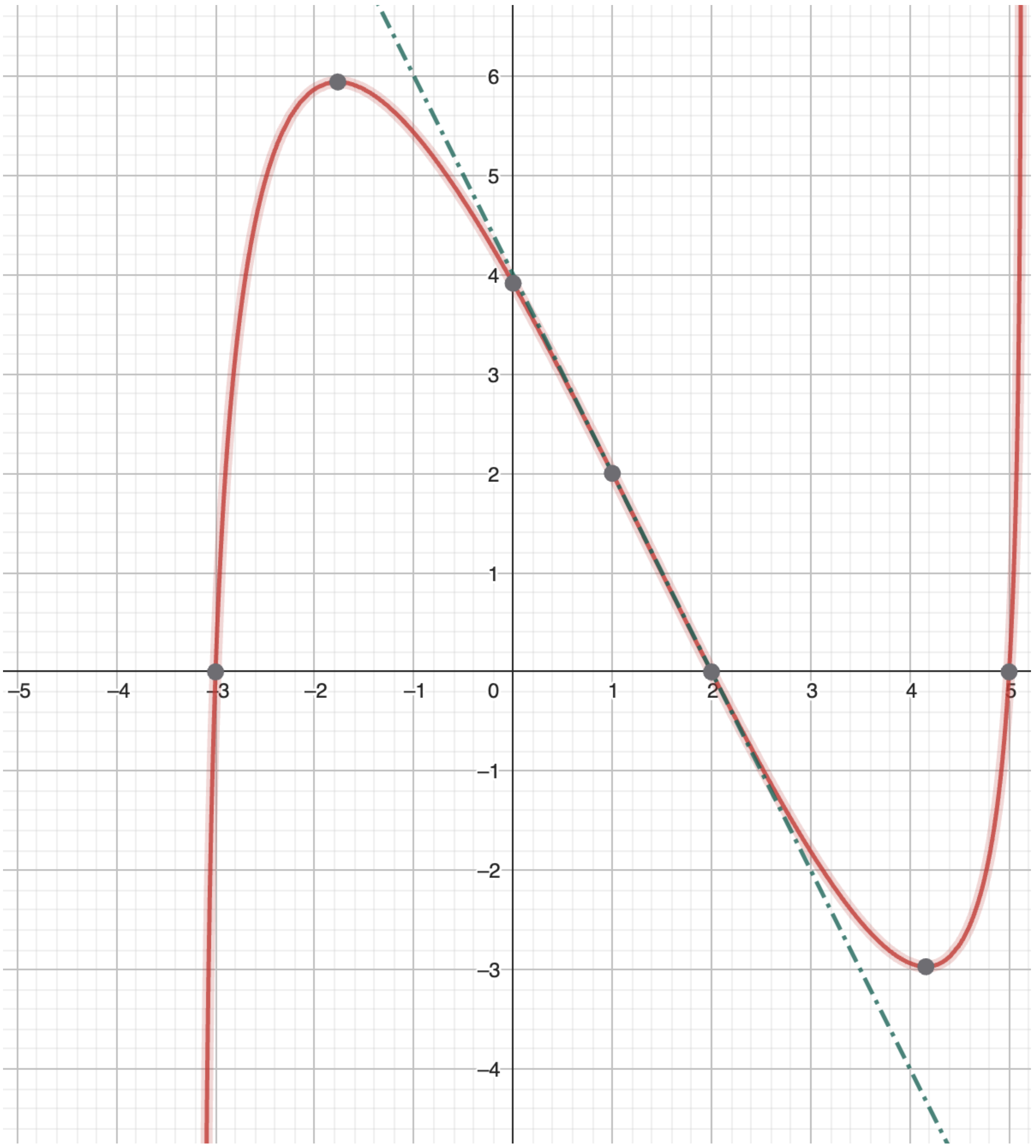

FIGURA 1. Gráfico da função $f(x) = (2 - x)\log_{\sqrt{17}}(17 - (x-1)^2)$ no intervalo $[-5, 5]$.