Mestrando em Estatística	**Apelido:** ______________________
19 de agosto de 2025	
Limite de tempo: 90 Minutos	**Nome:** ______________________

Problema 1. [3 pontos] Provar usando indução que,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Problema 2. [5 pontos] Dada a sucessão $(a_n)_n$ com $a_n = r^n$, estudar em função de $r \in (0, \infty)$:

a) Para quais valores de r a sucessão é crescente e para quais outros a sucessão é decrescente? Dica: Analisar $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

b) Convergência da sucessão. Se for convergente, indique qual é o limite e justifique, utilizando a definição, por que converge para esse número. Se tende para o infinito, justifique utilizando a definição vista em aula. Se não for convergente, explique porquê.

c) Justifique, de forma fundamentada, se a série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ é convergente ou não. Sabe calcular o seu limite? Dica: Se $s_m = \sum_{n=0}^{m} r^n$, calcular $(1-r)s_m$ para $r \neq 1$. Estudar de outra forma o caso $r = 1$.

Problema 3. [6 pontos] Decida se as seguintes séries são convergentes ou não (fazer 3 à escolha).

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \lambda \geq 0$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

c) $\sum_{n=500}^{\infty} \frac{500}{(n-200)(n-202)}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

Indicação para a alínea d): verifique se o teste da razão é inconclusivo primeiro. Em seguida, verifique se que é convergente utilizando o teste de Raabe, em outras palavras, verifique se $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$.

Problema 4. [2 pontos] Ordene as seguintes sucessões de acordo com o comportamento no infinito.

$$n \qquad n^2 \qquad \sqrt{n - \tfrac{1}{n}} \qquad n\log(n) \qquad 4^{-n} \qquad \frac{1}{n^2+1}$$

Por exemplo, $n \lesssim n^2$ porque $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} < 1$.

Problema 5. [4 pontos] Esboce um gráfico aproximado de

$$f(x) = 2(2-x)\log_{17}(17 - (x-1)^2)$$

no intervalo $[-5, 5]$, distinguindo corretamente o domínio, os zeros da função, bem como os intervalos de crescimento e convexidade. Indicação: Suponha que f' é nula apenas em $x = -2$ e $x = 4$, onde $f(-2) = 6$ e $f(4) = -3$, e que f'' é nula apenas em $x = 1$. Calcule $f(1)$.