Algebra linear

Universidade Pedagogica de Maputo

Folha 7. Alterações básicas.Diagonalização

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido da seguinte maneira

$$T(u_i) = w_i \quad i = 1, 2, 3$$

Sendo

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule a matriz associada à transformação T na base definida pelos vetores u_1, u_2 e u_3.

2. Verifique se as seguintes famílias de vetores formam as bases de $\mathbb{R}^3$ e encontram a matriz de mudança de coordenada correspondente.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

3. (a) mostram que se λ é um valor próprio de uma matriz quadrada A, então λ^k é um valor próprio de A^k.

(b) É a seguinte declaração verdadeira ou falsa? Se λ é um valor próprio de uma matriz A das dimensões $d \times d$ e μ é um auto-valor de uma matriz B das mesmas dimensões então $\lambda\mu$ é um auto-valor de AB.

4. Seja A a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

É possível diagonizar A?Calcule A^{456}.

5. Encontre os autovalores e autovetores das seguintes matrizes.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Encontre os autovalores da transformação linear que a os coeficientes de um polinômio de grau menor o igual que três associa aqueles de sua derivada.

7. Encontre os valores dos parâmetros das seguintes matrizes que os tornam diagonalizáveis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Calcule as autovalores e autovetores das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. A matriz é considerada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix},$$

sabemos de esta matriz que $\lambda = 1$ é um dos seus autovalores, e que este autovalor possui um autovetor associado $(1, 1, 1)$. É solicitado:

(a) Encontre os valores de a, b e c.

(b) Calcule os autovalores e autovetores de A.

10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Suponha que a matriz associada de T seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Prove que autovalores de A são diferentes, a menos que $a = c$ e $b = 0$, e nesse caso $A = a\,\mathrm{Id}$ e a, é o único valor próprio de A.

Encontre os autovalores e autovetores da matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

na base canônica

11. Seja S

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

com $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.Calcule os autovalores e autovetores de S.Dê uma interpretação geométrica do resultado obtido.

12. Seja A uma matriz triangular superior de ordem n cujos elementos na diagonal principal são todos diferentes. Tente que A é diagonalizável.

13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ um aplicativo linear. Seja $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $B' = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ uma base de $\mathbb{R}^4$.Seja $p \in \mathbb{R}$. Nós sabemos disso

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u_1} - \mathbf{u_3}) &= 3\mathbf{v_1} + p\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} + \mathbf{v_4} \\ T(\mathbf{u_2} - \mathbf{u_3}) &= \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + \mathbf{v_4} \\ T(2\mathbf{u_3}) &= 2\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_3} - 2\mathbf{v_4} \end{aligned}$$

E também sabemos que T não é injetivo (seu núcleo contém algum vetor que não seja zero vetor). Halle:

- A matriz de T em relação às bases dadas e seu imagem.
- Uma base de $\ker(T)$, o núcleo de T.
- Uma base e equações implícitas do imagem de T.

14. Seja $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ um aplicativo linear.Nós sabemos disso

$$\ker(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\},$$

$$T(1, 0, -1, 0) = (0, 1, 1, 0) \quad T \circ T(1, 0, -1, 0) = (2, 0, 0, 2).$$

   Halle:

   - a matriz A de T na base canônica;
   - Um sistema de equações satisfeitas com os vetores do subespaço $T(U)$, sendo U o subespaço vetorial definido pela equação $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

15. Consideramos a aplicação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que atende:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1 + x_2, x_2 + x - 3, x_3 + x_4, x_4 + x_1).$$

   Encontre uma base do núcleo do aplicativo e obtenha um sistema de equações que possuem como soluções os vetores da imagem de T.

16. Mostram que uma matriz quadrada tem os mesmos valores próprios que a seu transposta.

17. Suponha que A seja uma matriz quadrada com a propriedade de que a soma das entradas de cada uma de suas fileiras é igual à mesma quantidade c. Mostre que, neste caso c, é um valor próprio de A.

   Uma matriz estocástica, como aquelas que aparecem quando estudamos cadeias de Markov, tem colunas cujos elementos somam 1: deve ter necessariamente o autovalor 1?