Base ortonormais

Pablo Angulo, Fabricio Macià

Universidade Pedagogica de Maputo

Bases

Lembramos que um subespaço vetorial é definido como o conjunto de combinações lineares de um conjunto de geradores.

No entanto, *o mesmo subespaço* pode ser gerado com diferentes conjuntos de geradores, que podem ter um número diferente de elementos:

Bases

Lembramos que um subespaço vetorial é definido como o conjunto de combinações lineares de um conjunto de geradores.

No entanto, *o mesmo subespaço* pode ser gerado com diferentes conjuntos de geradores, que podem ter um número diferente de elementos:

$$\left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$\left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

Bases

Lembramos que um subespaço vetorial é definido como o conjunto de combinações lineares de um conjunto de geradores.

No entanto, *o mesmo subespaço* pode ser gerado com diferentes conjuntos de geradores, que podem ter um número diferente de elementos:

$$\left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

A **base** é um conjunto de geradores que também é linearmente independente.

Bases

Lembramos que um subespaço vetorial é definido como o conjunto de combinações lineares de um conjunto de geradores.

No entanto, *o mesmo subespaço* pode ser gerado com diferentes conjuntos de geradores, que podem ter um número diferente de elementos:

$$\left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$\left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

A **base** é um conjunto de geradores que também é linearmente independente.

Todas as bases do mesmo subespaço vetorial têm *o mesmo número de elementos* (esse número é *dimension* do subespaço).

Base Ortonormal

Lembramos que um subespaço admite muitas bases diferentes.
A escolha de uma base adequada pode simplificar bastante um problema: podemos obter a expressão de um subespaço ou uma transformação linear, especialmente simples.
Nessas notas, estudaremos as **Bases Ortonormais**, que facilitam especialmente o trabalho com o produto escalar, e também outros problemas, como o cálculo das coordenadas de um vetor nessa base.
Para fazer isso, estudaremos uma operação muito interessante: o **projeção ortogonal**. Esta operação nos permitirá encontrar bases ortonormais através do procedimento **Gram-schimdt**, mas também possui seus próprios aplicativos, o mais importante sendo **solução de quadrados mínimos**, que nos permitirá encontrar soluções aproximadas para sistemas de equações lineares que não tenham solução exata.

Objetivos

- projeção ortogonal em um subespaço.
- Bases Ortonormais.
- Cálculo da norma e coordenadas em uma base ortonormal.
- Solução quadrada mínima.

Base de S e $S^{\perp}$

Definimos um subespaço S e colocamos qualquer base.

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Base de S e $S^\perp$

Definimos um subespaço S e colocamos qualquer base.

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Lembramos que podemos calcular uma base de $S^\perp$ propondo um sistema de equações ...

$$S^\perp = \left\{ \mathbf{w} : \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0} \right\}$$

Base de S e $S^{\perp}$

Definimos um subespaço S e colocamos qualquer base.

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Lembramos que podemos calcular uma base de $S^{\perp}$ propondo um sistema de equações ...

$$S^{\perp} = \left\{ \mathbf{w} : \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0} \right\}$$

que resolvemos através do método Gauss:

$$S^{\perp} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Decomposição ortogonal associada a um subespaço vetorial

Reunindo uma base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de S e outro $\mathbf{v}_3$ de $S^\perp$, obtivemos uma base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembramos que uma base de $\mathbb{R}^3$ possui uma propriedade que a caracteriza: todo vetor de $\mathbb{R}^3$ está escrito *de uma maneira única* como uma combinação linear dos vetores da base.

Decomposição ortogonal associada a um subespaço vetorial

Reunindo uma base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de S e outro $\mathbf{v}_3$ de $S^\perp$, obtivemos uma base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembramos que uma base de $\mathbb{R}^3$ possui uma propriedade que a caracteriza: todo vetor de $\mathbb{R}^3$ está escrito *de uma maneira única* como uma combinação linear dos vetores da base.
Se escrevermos algum vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ nesta base:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{5}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \frac{2}{5}\mathbf{v}_3$$

Podemos escrever o vetor $\mathbf{v}$ *como a soma de um vetor de S e outro de $S^\perp$*.

Escrevemos o vetor $\mathbf{v}$ *como a soma de um vetor de S e outro de $S^\perp$*

$$\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\right) + \left(\frac{2}{5}\mathbf{v}_3\right)$$

$$\frac{3}{5}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \in S,\ \frac{2}{5}\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \in S^\perp$$

decomposição ortogonal associada a um subespaço vetorial

Escrevemos o vetor $\mathbf{v}$ *como a soma de um vetor de S e outro de $S^\perp$*

$$\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\right) + \left(\frac{2}{5}\mathbf{v}_3\right)$$

$$\frac{3}{5}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \in S, \ \frac{2}{5}\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \in S^\perp$$

Como sabemos que as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ são únicas, é fácil demonstrar que essa é a única maneira de escrever $\mathbf{v}$ como a soma de um vetor de S e outro de $S^\perp$.

decomposição ortogonal associada a um subespaço vetorial

Este é um fato absolutamente geral:

Dado um subespaço $S \subset \mathbb{R}^d$ e um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, há uma única maneira de escrever $\mathbf{v}$ como uma soma de um vetor $\mathbf{v}^S \in S$ e outro vetor $\mathbf{v}^\perp \in S^\perp$.

A demonstração é simples e é baseada em ingredientes que já vimos antes:

- $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
- $\dim S + \dim S^\perp = \dim \mathbb{R}^d$.
- $\dim(S + S^\perp) = \dim S + \dim S^\perp - \dim(S \cap S^\perp)$.

decomposição ortogonal associada a um subespaço vetorial

Segue-se que $\dim(S + S^{\perp}) = d$ e, portanto, que

$$S + S^{\perp} = \mathbb{R}^d.$$

Isso mostra que todo vetor de $\mathbb{R}^d$ é escrito como uma soma de um vetor de S e outro de $S^{\perp}$.
Vamos ver que essa decomposição é única.Se houver vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in S$, $\mathbf{w_1}, \mathbf{w}_2 \in S^{\perp}$ para que:

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2,$$

Então teríamos:

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1.$$

Este vetor está na interseção de S e $S^{\perp}$, portanto, deve ser igual ao vetor zero.Em particular:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1.$$

projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S

Já podemos definir a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ em $S \subset \mathbb{R}^d$.

projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S

Já podemos definir a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ em $S \subset \mathbb{R}^d$.

1. Encontramos uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de S e outro $\{\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ de $S^\perp$

projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S

Já podemos definir a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ em $S \subset \mathbb{R}^d$.

1. Encontramos uma base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de S e outro $\{\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_d\}$ de $S^\perp$
2. Encontramos as **coordenadas de v na base** $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_d\mathbf{v}_d$$

projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S

Já podemos definir a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ em $S \subset \mathbb{R}^d$.

1. Encontramos uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de S e outro $\{\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ de $S^\perp$
2. Encontramos as **coordenadas de v na base** $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_d\mathbf{v}_d$$

3. Dessa maneira, encontramos $\mathbf{v} = \mathbf{v}^S + \mathbf{v}^\perp$, onde $\mathbf{v}^S = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \in S$ e $\mathbf{v}^\perp = a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_d\mathbf{v}_d \in S^\perp$.

projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S

Já podemos definir a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ em $S \subset \mathbb{R}^d$.

1. Encontramos uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de S e outro $\{\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ de $S^\perp$
2. Encontramos as **coordenadas de v na base** $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_d\mathbf{v}_d$$

3. Dessa maneira, encontramos $\mathbf{v} = \mathbf{v}^S + \mathbf{v}^\perp$, onde $\mathbf{v}^S = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \in S$ e $\mathbf{v}^\perp = a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_d\mathbf{v}_d \in S^\perp$.
4. **projeção ortogonal de v em** S é o vetor $\mathbf{v}^S$.

projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S

Já podemos definir a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ em $S \subset \mathbb{R}^d$.

1. Encontramos uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de S e outro $\{\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ de $S^\perp$
2. Encontramos as **coordenadas de v na base** $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_d\mathbf{v}_d$$

3. Dessa maneira, encontramos $\mathbf{v} = \mathbf{v}^S + \mathbf{v}^\perp$, onde $\mathbf{v}^S = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \in S$ e $\mathbf{v}^\perp = a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_d\mathbf{v}_d \in S^\perp$.
4. **projeção ortogonal de v em** S é o vetor $\mathbf{v}^S$.

A construção anterior não depende da escolha da base de S ou da base de $S^\perp$.

Observamos que $\mathbf{v} - \mathbf{v}^S = \mathbf{v}^\perp$ é sempre perpendicular a S.

projeção ortogonal em um subespaço da dimensão 1

A projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em $S = \langle \mathbf{w} \rangle$ pode ser calculada com a fórmula:

$$P_S\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|})\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

demonstração:

projeção ortogonal em um subespaço da dimensão 1

A projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em $S = \langle \mathbf{w} \rangle$ pode ser calculada com a fórmula:

$$P_S\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|})\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

demonstração: Nós escrevemos

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} + \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\right)$$

É óbvio que $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$ pertence a S, e é necessário apenas demonstrar que o outro termo pertence a $S^{\perp}$. Para fazer isso, basta examinar seu produto escalar com $\mathbf{w}$, que é o gerador de S:

$$\mathbf{w} \cdot \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\right) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\|\mathbf{w}\|^2 = 0$$

Propiedades de la proyección ortogonal

$$P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

- La proyección ortogonal $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es proporcional a $\mathbf{w}$.

Propiedades de la proyección ortogonal

$$P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

- La proyección ortogonal $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es proporcional a $\mathbf{w}$.
- Si $\|\mathbf{w}\| = 1$, entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = (\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$.

Propiedades de la proyección ortogonal

$$P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

- La proyección ortogonal $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es proporcional a $\mathbf{w}$.
- Si $\|\mathbf{w}\| = 1$, entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.
- Si $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Propiedades de la proyección ortogonal

$$P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

- La proyección ortogonal $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es proporcional a $\mathbf{w}$.
- Si $\|\mathbf{w}\| = 1$, entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.
- Si $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- La longitud de $\|P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}\|$ es $\frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|}{\|\mathbf{w}\|} = \|\mathbf{v}\||cos(\theta)|$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

Propiedades de la proyección ortogonal

$$P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

- La proyección ortogonal $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es proporcional a $\mathbf{w}$.
- Si $\|\mathbf{w}\| = 1$, entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.
- Si $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- La longitud de $\|P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}\|$ es $\frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|}{\|\mathbf{w}\|} = \|\mathbf{v}\||cos(\theta)|$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
- El vector $\mathbf{u} := \mathbf{v} - P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es siempre ortogonal a $\mathbf{w}$.

Propiedades de la proyección ortogonal

$$P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

- La proyección ortogonal $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es proporcional a $\mathbf{w}$.
- Si $\|\mathbf{w}\| = 1$, entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.
- Si $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- La longitud de $\|P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}\|$ es $\frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|}{\|\mathbf{w}\|} = \|\mathbf{v}\||cos(\theta)|$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
- El vector $\mathbf{u} := \mathbf{v} - P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es siempre ortogonal a $\mathbf{w}$.
- Se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}\|^2 .$$

Propiedades de la proyección ortogonal

$$P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

- La proyección ortogonal $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es proporcional a $\mathbf{w}$.
- Si $\|\mathbf{w}\| = 1$, entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.
- Si $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ entonces $P_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- La longitud de $\|P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}\|$ es $\frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{w}\|} = \|\mathbf{v}\||cos(\theta)|$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
- El vector $\mathbf{u} := \mathbf{v} - P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es siempre ortogonal a $\mathbf{w}$.
- Se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - P_{\mathbf{w}}\mathbf{v}\|^2.$$

- Para cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$P_{\mathbf{w}}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aP_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) + bP_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})$$

Propriedades da projeção ortogonal

S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$ de qualquer dimensão e $P_S\mathbf{v}$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S.

- Teorema de Pitágoras:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_S\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}\|^2 .$$

- para qualquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$P_S(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aP_S(\mathbf{u}) + bP_S(\mathbf{v})$$

Propriedades da projeção ortogonal

S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$ de qualquer dimensão e $P_S\mathbf{v}$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S.

- Teorema de Pitágoras:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_S\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}\|^2 .$$

Demonstração:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_S\mathbf{v} + (\mathbf{v} - P_S\mathbf{v})\|^2 = \|P_S\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}\|^2 + 2(P_S\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}))$$

Sabemos que $P_S\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}) = 0$ porque $P_S\mathbf{v} \in S$ e $(\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}) \in S^\perp$.

- para qualquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$P_S(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aP_S(\mathbf{u}) + bP_S(\mathbf{v})$$

Propriedades da projeção ortogonal

S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$ de qualquer dimensão e $P_S\mathbf{v}$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S.

- Teorema de Pitágoras:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_S\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}\|^2 .$$

Demonstração:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_S\mathbf{v} + (\mathbf{v} - P_S\mathbf{v})\|^2 = \|P_S\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}\|^2 + 2(P_S\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}))$$

Sabemos que $P_S\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}) = 0$ porque $P_S\mathbf{v} \in S$ e $(\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}) \in S^{\perp}$.

- para qualquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$P_S(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aP_S(\mathbf{u}) + bP_S(\mathbf{v})$$

Demonstração: Basta quebrar $\mathbf{u} = P_S\mathbf{u} + (\mathbf{u} - P_S\mathbf{u})$, $\mathbf{v} = P_S\mathbf{v} + (\mathbf{v} - P_S\mathbf{v})$ e adicionar

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (aP_S\mathbf{u} + bP_S\mathbf{v}) + (a(\mathbf{u} - P_S\mathbf{u}) + b(\mathbf{v} - P_S\mathbf{v}))$$

expressar $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ como a soma de um vetor em S e outro em $S^{\perp}$.

Propriedades da projeção ortogonal

S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$ de qualquer dimensão e $P_S\mathbf{v}$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S.

- Sim $\mathbf{v} \in S$ então
$$P_S\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$
- Sim $\mathbf{v} \in S^\perp$ então
$$P_S\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Exercício

Calcule a projeção ortogonal em

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

dos seguintes vetores:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

propriedade da distância mínima

S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$ de qualquer dimensão e $P_S\mathbf{v}$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S.

Para qualquer vetor $\mathbf{w} \in S$, você tem que

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| \geq \|P_S\mathbf{v} - \mathbf{v}\|$$

Em outras palavras, $P_S\mathbf{v}$ é o vetor de S mais próximo de $\mathbf{v}$.

propriedade da distância mínima

S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$ de qualquer dimensão e $P_S\mathbf{v}$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S.

Para qualquer vetor $\mathbf{w} \in S$, você tem que

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| \geq \|P_S\mathbf{v} - \mathbf{v}\|$$

Em outras palavras, $P_S\mathbf{v}$ é o vetor de S mais próximo de $\mathbf{v}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{w} - P_s\mathbf{v} + p_s\mathbf{v} - \mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{w} - p_s\mathbf{v}\|^2 + \|P_S\mathbf{v} - \mathbf{v}\|^2 \\ &\geq \|P_S\mathbf{v} - \mathbf{v}\|^2 .\end{aligned}$$

propriedade da distância mínima

S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$ de qualquer dimensão e $P_S\mathbf{v}$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S.

Para qualquer vetor $\mathbf{w} \in S$, você tem que

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| \geq \|P_S\mathbf{v} - \mathbf{v}\|$$

Em outras palavras, $P_S\mathbf{v}$ é o vetor de S mais próximo de $\mathbf{v}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{w} - P_s\mathbf{v} + p_s\mathbf{v} - \mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{w} - p_s\mathbf{v}\|^2 + \|P_S\mathbf{v} - \mathbf{v}\|^2 \\ &\geq \|P_S\mathbf{v} - \mathbf{v}\|^2 . \end{aligned}$$

Esse fato simples tem aplicativos importantes, como veremos.

Base Ortonormal

Como dissemos, procuramos encontrar uma base *especial* de um subespaço vetorial.

Um conjunto de vetores é mutuamente ortogonal se

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0(\text{ Sim } i \neq j)$$

Base Ortonormal

Como dissemos, procuramos encontrar uma base *especial* de um subespaço vetorial.

Um conjunto de vetores é mutuamente ortogonal se

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0(\text{ Sim } i \neq j)$$

Um conjunto de vetores não nulos e mutuamente ortogonais é necessariamente **linearmente independente**.

Base Ortonormal

Como dissemos, procuramos encontrar uma base *especial* de um subespaço vetorial.

Um conjunto de vetores é mutuamente ortogonal se

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0(\text{ Sim } i \neq j)$$

Um conjunto de vetores não nulos e mutuamente ortogonais é necessariamente **linearmente independente**.

- Se encontrarmos m vetores não nulos e mutuamente ortogonais dentro de um espaço de dimensão m, eles são automaticamente uma base.
- Se encontrarmos m vetores não nulos e mutuamente ortogonais dentro de um subespaço vetorial, o espaço tem pelo menos dimensão m.

demonstração

Um conjunto de vetores não nulos e mutuamente ortogonais é necessariamente **linearmente independente**.

demonstração

Um conjunto de vetores não nulos e mutuamente ortogonais é necessariamente **linearmente independente**.

Se para certos números reais $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ você tem:

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + ... \lambda_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}.$$

Multiplicando esta equação por $\mathbf{u}_1$ obtemos:

$$\lambda_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + \lambda_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) + \lambda_3 (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1) + ... \lambda_r (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_1) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u}_1 = 0.$$

demonstração

Um conjunto de vetores não nulos e mutuamente ortogonais é necessariamente **linearmente independente**.

Se para certos números reais $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ você tem:

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + ...\lambda_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}.$$

Multiplicando esta equação por $\mathbf{u}_1$ obtemos:

$$\lambda_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + \lambda_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) + \lambda_3 (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1) + ...\lambda_r (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_1) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u}_1 = 0.$$

Agora, todos os anúncios na parte esquerda dessa identidade são Nulas, exceto o primeiro ser:

$$(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) = (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1) = ... = (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_1) = 0.$$

Então,

$$0 = \lambda_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) = \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2,$$

do que é seguido isso, sendo $\|\mathbf{u}_1\| \neq 0$, que $\lambda_1 = 0$.

demonstração

Um conjunto de vetores não nulos e mutuamente ortogonais é necessariamente **linearmente independente**.

Se para certos números reais $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ você tem:

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + ...\lambda_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}.$$

Multiplicando esta equação por $\mathbf{u}_1$ obtemos:

$$\lambda_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + \lambda_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) + \lambda_3 (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1) + ...\lambda_r (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_1) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u}_1 = 0.$$

Agora, todos os anúncios na parte esquerda dessa identidade são Nulas, exceto o primeiro ser:

$$(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) = (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1) = ... = (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_1) = 0.$$

Então,

$$0 = \lambda_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) = \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2,$$

do que é seguido isso, sendo $\|\mathbf{u}_1\| \neq 0$, que $\lambda_1 = 0$. Prosseguindo da mesma maneira com $\mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r$, obtemos isso $\lambda_2 = 0, ..., \lambda_r = 0$, respectivamente.

Base Ortonormal

Os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r$ S formam a **Base Ortonormal de** S se forem a base de S, são mutuamente ortogonais e também unitários:

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r \in S, \text{ gerar o subespaço } s;$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0, \qquad \text{Si } i \neq j;$$

$$\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = ... = \|\mathbf{u}_r\| = 1.$$

Base Ortonormal

Os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ S formam a **Base Ortonormal de** S se forem a base de S, são mutuamente ortogonais e também unitários:

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \in S, \text{ gerar o subespaço } s;$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0, \qquad \text{Si } i \neq j;$$

$$\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = \ldots = \|\mathbf{u}_r\| = 1.$$

Exemplo:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Eles são uma base ortonormal de:

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Exercício

Encontre uma base ortonormal para cada um dos seguintes subespaços:

Exercício

Encontre uma base ortonormal para cada um dos seguintes subespaços:

$$S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Exercício

Encontre uma base ortonormal para cada um dos seguintes subespaços:

$$S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$S_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

Exercício

Encontre uma base ortonormal para cada um dos seguintes subespaços:

$$S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$S_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

$$S_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Exercício

Encontre uma base ortonormal para cada um dos seguintes subespaços:

$$S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$S_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

$$S_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$S_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

coordenadas de um vetor em uma base ortonormal

Seja $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r$ uma base ortonormal de um subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^d$.Então para qualquer vetor $\mathbf{v} \in S$ Você tem:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + ... + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r)\,\mathbf{u}_r$$

coordenadas de um vetor em uma base ortonormal

Seja $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r$ uma base ortonormal de um subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^d$.Então para qualquer vetor $\mathbf{v} \in S$ Você tem:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\, \mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\, \mathbf{u}_2 + ... + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r)\, \mathbf{u}_r$$

Demonstração: Escrevemos $\mathbf{v} \in S$ como uma combinação linear dos elementos da base:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{u}_r.$$

coordenadas de um vetor em uma base ortonormal

Seja $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r$ uma base ortonormal de um subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^d$.Então para qualquer vetor $\mathbf{v} \in S$ Você tem:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + ... + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r)\,\mathbf{u}_r$$

Demonstração: Escrevemos $\mathbf{v} \in S$ como uma combinação linear dos elementos da base:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{u}_r.$$

Se multiplicarmos esta equação ń pelo vetor $\mathbf{u}_1$ Nós conseguimos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 &= (\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{u}_r) \cdot \mathbf{u}_1 \\ &= \lambda_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + \lambda_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) + ... + \lambda_r (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_1) \\ &= \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 + \lambda_2 0 + ... + \lambda_r 0 \\ &= \lambda_1. \end{aligned}$$

coordenadas de um vetor em uma base ortonormal

Seja $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r$ uma base ortonormal de um subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^d$.Então para qualquer vetor $\mathbf{v} \in S$ Você tem:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + ... + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r)\,\mathbf{u}_r$$

Demonstração: Escrevemos $\mathbf{v} \in S$ como uma combinação linear dos elementos da base:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{u}_r.$$

Se multiplicarmos esta equação ń pelo vetor $\mathbf{u}_1$ Nós conseguimos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 &= (\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{u}_r) \cdot \mathbf{u}_1 \\ &= \lambda_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + \lambda_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) + ... + \lambda_r (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_1) \\ &= \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 + \lambda_2 0 + ... + \lambda_r 0 \\ &= \lambda_1. \end{aligned}$$

Repetindo o cálculo anterior com $\mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r$ nós conseguimos:

$$\lambda_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2, ..., \lambda_r = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r.$$

Como queríamos demonstrar.

Norma de um vetor em uma base Ortonormal

Vamos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r$ uma base ortonormal de Um subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^d$.Então para qualquer vetor $\mathbf{v} \in S$ você tem:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + ... + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r)^2 .$$

Norma de um vetor em uma base Ortonormal

Vamos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r$ uma base ortonormal de Um subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^d$.Então para qualquer vetor $\mathbf{v} \in S$ você tem:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + ... + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r)^2 .$$

Demonstração: Sabemos que $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{u}_r$ sendo $\lambda_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i$.
Então:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^{d} \lambda_i \lambda_j (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j) .$$

O únicos termos não nulos na soma anterior são aqueles que envolvem $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i$.Como
Éntão:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 + ... + (\lambda_r)^2 ,$$

E concluímos usando que $\lambda_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i$.

Como encontrar uma base ortonormal?

É sempre possível encontrar bases ortonormais, usando por exemplo o método de Gram-Schmidt, mas não vamos falar de esto.

- Seção 5.7 do livro do aula.
- Método de Gram-Schmidt em ação: `https://www.cancamusa.net/sage/gram-schmidt.html`
- Wikipedia acerca do Método de Gram-Schmidt: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Processo_de_Gram-Schmidt`

projeção ortogonal usando bases ortonormais

Se tivermos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de $S \subset \mathbb{R}^d$, podemos calcular a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ assim:

$$P_S\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Não precisamos de uma base de $S^\perp$!

projeção ortogonal usando bases ortonormais

Se tivermos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de $S \subset \mathbb{R}^d$, podemos calcular a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ assim:

$$P_S\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Não precisamos de uma base de $S^\perp$!

Demonstração:

1. Encontramos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_d\}$ de $S^\perp$ com o método Gram-schimdt

projeção ortogonal usando bases ortonormais

Se tivermos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ de $S \subset \mathbb{R}^d$, podemos calcular a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ assim:

$$P_S\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Não precisamos de uma base de $S^\perp$!

Demonstração:

1. Encontramos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_d\}$ de $S^\perp$ com o método Gram-schimdt
2. Encontramos as **coordenadas de v na base** $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ obtidas juntando-se às bases ortonormais de S e $S^\perp$:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_d)\mathbf{u}_d$$

projeção ortogonal usando bases ortonormais

Se tivermos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de $S \subset \mathbb{R}^d$, podemos calcular a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ assim:

$$P_S\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Não precisamos de uma base de $S^\perp$!

Demonstração:

1. Encontramos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_d\}$ de $S^\perp$ com o método Gram-schimdt
2. Encontramos as **coordenadas de v na base** $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d\}$ obtidas juntando-se às bases ortonormais de S e $S^\perp$:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_d)\mathbf{u}_d$$

3. Escrevemos $\mathbf{v} = \mathbf{v}^S + \mathbf{v}^\perp$, onde $\mathbf{v}^S = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k \in S$ e $\mathbf{v}^\perp = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_d)\mathbf{u}_d \in S^\perp$.

projeção ortogonal usando bases ortonormais

Se tivermos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ de $S \subset \mathbb{R}^d$, podemos calcular a projeção ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ assim:

$$P_S\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Não precisamos de uma base de $S^\perp$!

Demonstração:

1. Encontramos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_d\}$ de $S^\perp$ com o método Gram-schimdt
2. Encontramos as **coordenadas de v na base** $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ obtidas juntando-se às bases ortonormais de S e $S^\perp$:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_d)\mathbf{u}_d$$

3. Escrevemos $\mathbf{v} = \mathbf{v}^S + \mathbf{v}^\perp$, onde $\mathbf{v}^S = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k \in S$ e $\mathbf{v}^\perp = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_d)\mathbf{u}_d \in S^\perp$.
4. **projeção ortogonal de v em** S é o vetor $\mathbf{v}^S$.