Determinante

Parte I: Motivação, Definição, Propriedades, Fórmulas

Introdução

Motivação

Medir "**volume**" (generalizado) de regiões em $\mathbb{R}^n$.

Motivação

Medir "**volume**" (generalizado) de regiões em $\mathbb{R}^n$.
Significado de **volume**: Comprimento, em $\mathbb{R}$;

Introdução

Motivação

Medir “**volume**” (generalizado) de regiões em $\mathbb{R}^n$.
Significado de **volume**: Comprimento, em $\mathbb{R}$; área, em $\mathbb{R}^2$;

Introdução

Motivação

Medir “**volume**” (generalizado) de regiões em $\mathbb{R}^n$.
Significado de **volume**: Comprimento, em $\mathbb{R}$; área, em $\mathbb{R}^2$; volume, em $\mathbb{R}^3$;

Introdução

Motivação

Medir "**volume**" (generalizado) de regiões em $\mathbb{R}^n$.
Significado de **volume**: Comprimento, em $\mathbb{R}$; área, em $\mathbb{R}^2$; volume, em $\mathbb{R}^3$; hiper-volume em $\mathbb{R}^4$; etc.

Introdução

Motivação

Medir "**volume**" (generalizado) de regiões em $\mathbb{R}^n$.
Significado de **volume**: Comprimento, em $\mathbb{R}$; área, em $\mathbb{R}^2$; volume, em $\mathbb{R}^3$; hiper-volume em $\mathbb{R}^4$; etc.

Roteiro

- Começar com **paralelepípedos** (generalizados)
  (Segmentos, em $\mathbb{R}$; paralelogramos, em $\mathbb{R}^2$; paralelepípedos, em $\mathbb{R}^3$; hiper-paralelepípedos, em $\mathbb{R}^4$; etc.)

Introdução

Motivação

Medir "**volume**" (generalizado) de regiões em $\mathbb{R}^n$.
Significado de **volume**: Comprimento, em $\mathbb{R}$; área, em $\mathbb{R}^2$; volume, em $\mathbb{R}^3$; hiper-volume em $\mathbb{R}^4$; etc.

Roteiro

- Começar com **paralelepípedos** (generalizados)
(Segmentos, em $\mathbb{R}$; paralelogramos, em $\mathbb{R}^2$; paralelepípedos, em $\mathbb{R}^3$; hiper-paralelepípedos, em $\mathbb{R}^4$; etc.)
- Identificar **propriedades** que função volume deve satisfazer.

Introdução

Motivação

Medir "**volume**" (generalizado) de regiões em $\mathbb{R}^n$.
Significado de **volume**: Comprimento, em $\mathbb{R}$; área, em $\mathbb{R}^2$; volume, em $\mathbb{R}^3$; hiper-volume em $\mathbb{R}^4$; etc.

Roteiro

- Começar com **paralelepípedos** (generalizados)
  (Segmentos, em $\mathbb{R}$; paralelogramos, em $\mathbb{R}^2$; paralelepípedos, em $\mathbb{R}^3$; hiper-paralelepípedos, em $\mathbb{R}^4$; etc.)
- Identificar **propriedades** que função volume deve satisfazer.
- Encontrar a **única função** com estas propriedades, o **determinante**.

Introdução

Motivação

Medir "**volume**" (generalizado) de regiões em $\mathbb{R}^n$.
Significado de **volume**: Comprimento, em $\mathbb{R}$; área, em $\mathbb{R}^2$; volume, em $\mathbb{R}^3$; hiper-volume em $\mathbb{R}^4$; etc.

Roteiro

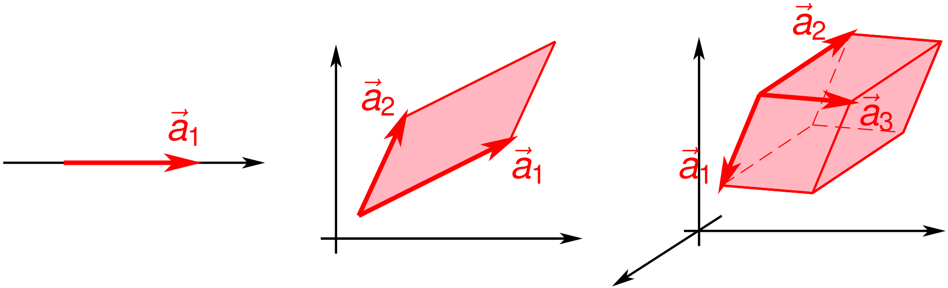
- Começar com **paralelepípedos** (generalizados)
  (Segmentos, em $\mathbb{R}$; paralelogramos, em $\mathbb{R}^2$; paralelepípedos, em $\mathbb{R}^3$; hiper-paralelepípedos, em $\mathbb{R}^4$; etc.)
- Identificar **propriedades** que função volume deve satisfazer.
- Encontrar a **única função** com estas propriedades, o **determinante**.
- Derivar mais propriedades e algoritmo eficiente para o cálculo.

Paralelepípedos

Definição (Paralelepípedo)

O paralelepípedo gerado por $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ *é o conjunto*

$$\left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i, \text{ com } \alpha_i \in [0,1] \right\}.$$



Definição Geométrica do Determinante

Definimos a função $\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \text{volume do paralelepípedo gerado por } \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n.$$

Definição Geométrica do Determinante

Definimos a função $\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \text{volume do paralelepípedo gerado por } \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n.$$

Observações:

- Na realidade $\det$ mede “volumes **com sinal**”, similar a área com sinal da integral. Mas começamos com ideia mais intuitiva.

Definição Geométrica do Determinante

Definimos a função $\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \text{volume do paralelepípedo gerado por } \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n.$$

Observações:

- Na realidade $\det$ mede “volumes **com sinal**”, similar a área com sinal da integral. Mas começamos com ideia mais intuitiva.
- Poupamos espaço usando notação:

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \left|\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right|$$

Definição Geométrica do Determinante

Definimos a função $\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \text{volume do paralelepípedo gerado por } \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n.$$

Observações:

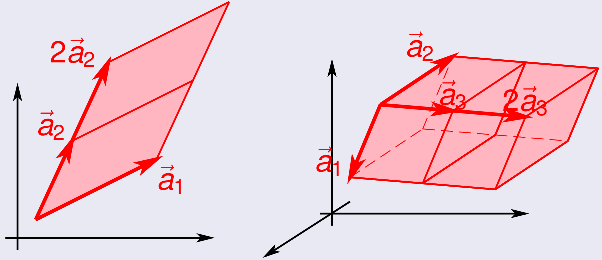
- Na realidade $\det$ mede "volumes **com sinal**", similar a área com sinal da integral. Mas começamos com ideia mais intuitiva.
- Poupamos espaço usando notação:

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \left|\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right|$$

- Definimos **determinante** de matriz A quadrada usando suas colunas $\vec{a}_j$: $\det A = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$.

Propriedade (i.a)

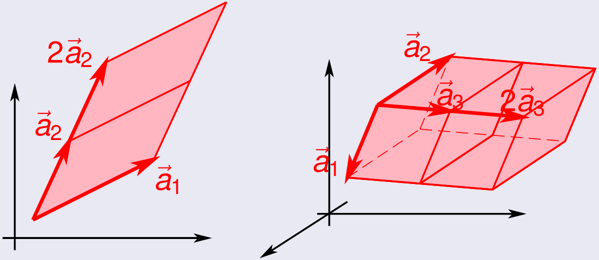
$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \alpha\vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n) = \alpha \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n)$$



Propriedades do Determinante

Propriedade (i.a)

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \alpha\vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n) = \alpha \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n)$$



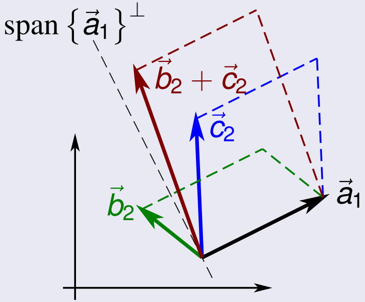
Observação:

- Se $\det$ medisse volumes (sem sinal), α deveria sair como $|\alpha|$.

Propriedades do Determinante

Propriedade (i.b)

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{b}_k + \vec{c}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{b}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{c}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n)$$



Propriedades do Determinante

Propriedade (i) Multi-Linearidade ou n-Linearidade

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \alpha\vec{b}_k + \beta\vec{c}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n) \;=\; & \alpha \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{b}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n) \\ & + \beta \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{c}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n)\end{aligned}$$

Propriedade (i) Multi-Linearidade ou *n*-Linearidade

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \alpha\vec{b}_k + \beta\vec{c}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots \vec{a}_n) = \alpha \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{b}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots \vec{a}_n) + \beta \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{c}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots \vec{a}_n)$$

Exemplos

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -8 & -9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & -8 & -9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & -8 & -9 \end{vmatrix}$

Propriedades do Determinante

Propriedade (i) Multi-Linearidade ou *n*-Linearidade

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \alpha\vec{b}_k + \beta\vec{c}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n) \;=\; & \alpha \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{b}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n) \\ & + \beta \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{c}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n)\end{aligned}$$

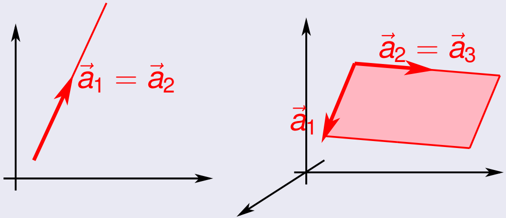
Exemplos

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -8 & -9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & -8 & -9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & -8 & -9 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \left(3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \right) = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

Propriedades do Determinante

Propriedade (ii) Alternância

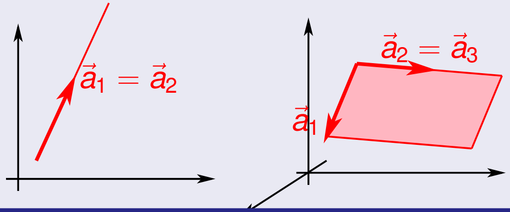
$$\vec{a}_i = \vec{a}_j, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0.$$



Propriedades do Determinante

Propriedade (ii) Alternância

$$\vec{a}_i = \vec{a}_j, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0.$$



Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Propriedades do Determinante

Propriedade (iii) Hiper-Cubo Unitário

$$\det(I) = \det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1.$$

Boa-Definição do Determinante

Teorema (existência e unicidade da função det)

Existe uma única função $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ *tal que*

- $\det$ *é n-linear nas colunas da matriz;*
- $\det$ *é alternada e*
- $\det(I) = 1$.

Boa-Definição do Determinante

Teorema (existência e unicidade da função $\det$)

Existe uma única função $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ *tal que*

- $\det$ *é n-linear nas colunas da matriz;*
- $\det$ *é alternada e*
- $\det(I) = 1$*.*

Veremos a ideia da prova, em breve.

Boa-Definição do Determinante

Teorema (existência e unicidade da função det)

Existe uma única função $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ *tal que*

- $\det$ *é n-linear nas colunas da matriz;*
- $\det$ *é alternada e*
- $\det(I) = 1$*.*

Veremos a ideia da prova, em breve.

Antes, examinaremos mais propriedades do determinante (se existir).

Mais Propriedades do Determinante

Teorema (trocar colunas $\Rightarrow$ trocar o sinal)

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_j, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n)$$
$$= -\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_j, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n)$$

Mais Propriedades do Determinante

Teorema (trocar colunas $\Rightarrow$ trocar o sinal)

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_j, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n)$$
$$= -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_j, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n)$$

Prova: Para simplificar a notação, omitimos os argumentos que não variam. Assim,

$$\underbrace{\det(\vec{a}_i + \vec{a}_j, \vec{a}_i + \vec{a}_j)}_{=0} = \underbrace{\det(\vec{a}_i, \vec{a}_i)}_{=0} + \det(\vec{a}_i, \vec{a}_j) + \det(\vec{a}_j, \vec{a}_i) + \underbrace{\det(\vec{a}_j, \vec{a}_j)}_{=0}.$$

Mais Propriedades do Determinante

Teorema (colunas LD $\Rightarrow$ determinante zero)

Se $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ *é linearmente dependente, então* $\det(A) = 0$.

Mais Propriedades do Determinante

Teorema (colunas LD $\Rightarrow$ determinante zero)

Se $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ *é linearmente dependente, então* $\det(A) = 0$*.*

Prova: Se o conjunto é LD, então $\vec{a}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i \vec{a}_i$.

Mais Propriedades do Determinante

Teorema (colunas LD $\Rightarrow$ determinante zero)

Se $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ *é linearmente dependente, então* $\det(A) = 0$.

Prova: Se o conjunto é LD, então $\vec{a}_k = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \alpha_i \vec{a}_i$.

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \alpha_i \vec{a}_i, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \alpha_i \underbrace{\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n)}_{=0}$$

Teorema (colunas LD $\Rightarrow$ determinante zero)

Se $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ *é linearmente dependente, então* $\det(A) = 0$.

Prova: Se o conjunto é LD, então $\vec{a}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i \vec{a}_i$.

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i \vec{a}_i, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i \underbrace{\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n)}_{=0}$$

Observação

Veremos que vale também a volta: colunas LD $\iff$ *determinante zero.*

Mais Propriedades do Determinante

Teorema (determinante de matriz diagonal)

Se D é diagonal, então $\det(D) = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn}$.

Mais Propriedades do Determinante

Teorema (determinante de matriz diagonal)

Se D é diagonal, então $\det(D) = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn}$.

Prova:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} d_{11}\vec{e}_1 & d_{22}\vec{e}_2 & \cdots & d_{nn}\vec{e}_n \end{vmatrix} = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn}\underbrace{\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{vmatrix}}_{|I|=1}$$

Determinante de Matriz 2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}_{a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{22}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1}} + a_{21} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}_{a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-1} + a_{22}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0}}$$

Determinante de Matriz 2×2

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
=
a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}_{a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{22}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1}}
+
a_{21} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}_{a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-1} + a_{22}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0}}
$$

$$
\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}
$$

Determinante de Matriz 2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}_{a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{22}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1}} + a_{21} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}_{a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-1} + a_{22}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0}}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$-$ $\qquad\qquad$ $+$

Determinante de Matriz 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinante de Matriz 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \left(a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

Determinante de Matriz 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \left(a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$a_{11}a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} \left(a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{23} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{33} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{0} \right) = 0$$

Determinante de Matriz 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \left(a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$a_{11} a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{12} \left(a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{23} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{33} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{0} \right) = 0$$

$$a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \left(a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{23} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{33} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} \right) = a_{11} a_{22} a_{33}$$

Determinante de Matriz 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \left(a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$a_{11}a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} \left(a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{23} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{33} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{0} \right) = 0$$

$$a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \left(a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{23} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{33} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} \right) = a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$a_{11}a_{32} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} \left(a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + a_{23} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-1} + a_{33} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0} \right) = -a_{11}a_{32}a_{23}$$

Determinante de Matriz 3×3 — continuação

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Determinante de Matriz 3×3 — continuação

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \quad \text{e}$$

$$a_{31}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Determinante de Matriz 3×3 — continuação

Finalmente,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ \\ -a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{array}$$

Determinante de Matriz 3×3 — continuação

Finalmente,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ \\ -a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

Regras de Sarrus

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \qquad + \qquad\qquad - \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

Estes diagramas mnemônicos, conhecidos como regras de Sarrus, **não** se estendem além de matrizes 3×3.

Determinante de Matriz $n \times n$: intuição sobre fórmula

- Linearidade em cada coluna $\implies$ somatório de termos da forma:

$$a_{31}a_{52}a_{13}a_{44}a_{25}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\in \{-1,0,1\}}$$

(Com um 1 por coluna.)

Determinante de Matriz $n \times n$: intuição sobre fórmula

- Linearidade em cada coluna $\implies$ somatório de termos da forma:

$$a_{31}\,a_{52}\,a_{13}\,a_{44}\,a_{25}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\in \{-1,0,1\}}$$

(Com um 1 por coluna.)

- n^n termos, mas "só" $n!$ não-nulos. (Quando 1's estão em linhas distintas.)

Determinante de Matriz $n \times n$: intuição sobre fórmula

- Linearidade em cada coluna $\implies$ somatório de termos da forma:

$$a_{31}a_{52}a_{13}a_{44}a_{25}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\in \{-1,0,1\}} \qquad \text{(Com um 1 por coluna.)}$$

- n^n termos, mas "só" $n!$ não-nulos. (Quando 1's estão em linhas distintas.)
- termos não-nulos associados com permutações $\sigma \in S_n$ (todas permutações).

Determinante de Matriz $n \times n$: intuição sobre fórmula

- Linearidade em cada coluna $\implies$ somatório de termos da forma:

$$a_{31} a_{52} a_{13} a_{44} a_{25} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\in \{-1,0,1\}} \qquad \text{(Com um 1 por coluna.)}$$

- n^n termos, mas "só" $n!$ não-nulos. (Quando 1's estão em linhas distintas.)
- termos não-nulos associados com permutações $\sigma \in S_n$ (todas permutações). Exemplo, $\{1, 2, 3, 4, 5\} \overset{\sigma}{\mapsto} \{3, 5, 1, 4, 2\}$ associada com

$$a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3} a_{\sigma(4),4} a_{\sigma(5),5} \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j},$$

$\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ ou -1 (sinal da permutação σ).

Fórmula de Leibniz para Determinante

- Fórmula de Leibniz: $$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.}$$

Fórmula de Leibniz para Determinante

- Fórmula de Leibniz: $$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.}$$
- Fórmula de uso **teórico**: número de termos cresce muito rapidamente!

n	$n!$
3	6
5	120
20	2.4×10^{18}
50	3.0×10^{64}

Fórmula de Leibniz para Determinante

- Fórmula de Leibniz: $$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.}$$
- Fórmula de uso **teórico**: número de termos cresce muito rapidamente!

n	$n!$
3	6
5	120
20	2.4×10^{18}
50	3.0×10^{64}

- Fórmula prova **unicidade** se $\det$ existir, tem que ter fórmula acima.

Fórmula de Leibniz para Determinante

- Fórmula de Leibniz: $$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.}$$
- Fórmula de uso **teórico**: número de termos cresce muito rapidamente!

n	$n!$
3	6
5	120
20	2.4×10^{18}
50	3.0×10^{64}

- Fórmula prova **unicidade** se $\det$ existir, tem que ter fórmula acima.
  Falta verificar **propriedades**: n-linear, alternada e vale 1 na identidade.

Fórmula de Leibniz para Determinante

- Fórmula de Leibniz: $$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.}$$
- Fórmula de uso **teórico**: número de termos cresce muito rapidamente!

n	$n!$
3	6
5	120
20	2.4×10^{18}
50	3.0×10^{64}

- Fórmula prova **unicidade** se $\det$ existir, tem que ter fórmula acima.
  Falta verificar **propriedades**: n-linear, alternada e vale 1 na identidade.
  Verficação é fácil mas tediosa: será omitida.