Autovalores e diagonalização de transformações lineares

Pablo Angulo, Fabricio Macià

Universidade Pedagógica de Maputo

Autovalores: O que são

Nesta apresentação, consideraremos apenas transformações lineares com o mesmo espaço de partida que a chegada:

$$T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

Suponha que A seja a matriz de transformação: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
A matriz A é quadrada $d \times d$.

Autovalores: O que são

Nesta apresentação, consideraremos apenas transformações lineares com o mesmo espaço de partida que a chegada:

$$T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

Suponha que A seja a matriz de transformação: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
A matriz A é quadrada $d \times d$.

Um número λ é um **autovalor** de T se pudermos encontrar um vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ **no nulo** é cumprido:

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Por exemplo, $\lambda = 2$ e $\mu = -1$ são autovalores da transformação:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

desde:

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Autovalores e Núcleo

Seja T uma transformação linear:

$$T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

$\lambda = 0$ é um valor próprio da transformação T sim e somente se:

$$\ker(T) \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Em outras palavras: se o núcleo de T contém algum vetor mais do que o vetor zero, então $\lambda = 0$ é um valor próprio de T.
O recíproco também é verdadeiro.

AutoValores: O que são

Suponha que λ seja um valor próprio da transformação linear:

$$T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

Os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ que se reúnem $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ são chamados **autovetores** de T associados ao autovalor λ.

AutoValores: O que são

Suponha que λ seja um valor próprio da transformação linear:

$$T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

Os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ que se reúnem $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ são chamados **autovetores** de T associados ao autovalor λ.

O conjunto de todos os autovetores associadas ao mesmo valor próprio λ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$. É chamado **autoespaço** associado ao autovalor λ.

A transformação T transforma os vetores de S_λ como se fosse uma homotecia da razão λ.

Autovalores: um exemplo

Vamos aceitar o exemplo anterior:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$\lambda = 2$ É um valor próprio de T e vimos que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ era um autovetor associado a esse valor próprio.

Autovalores: um exemplo

Vamos aceitar o exemplo anterior:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$\lambda = 2$ É um valor próprio de T e vimos que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ era um autovetor associado a esse valor próprio. O autoespaço S_2 associado a $\lambda = 2$ é formado por todos os vetores com o qual eles cumprem:

$$T(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}.$$

Esses vetores são soluções de sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo, entendemos:

$$S_2 = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x = 0\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Autovetores associados a diferentes valores de autovalores são linearmente independentes

Se T é uma transformação linear e λ, μ é de autovalores que não T: $\lambda \neq \mu$, os autoespaços correspondentes correspondem a:

$$S_\lambda \cap S_\mu = \{\mathbf{0}\}.$$

Em particular, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ forem autovetores de T, diferentes de zero e associados à autovalores **diferentes** então:

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k \qquad \text{Eles são linearmente independentes.}$$

aviso sobre terminologia

Às vezes, você encontra outros nomes para se referir aos autovalores ou autovetores de uma transformação T.

Os mais comuns são:

- Alguns livros se referem a autovalores como **valores próprios** e autovetores como **vetores próprios**.
- Em inglês, os autovalores são chamados **EigenValues** e as autovetores **EigenVectors**.
- Na física, os autovalores são geralmente chamados **modos** próprios.

Autovalores e Autovetores: Para que são para

Compreender os autovalores e autovetores de uma transformação linear é um problema fundamental em muitas áreas de física e engenharia.

Por exemplo, calcular os modos de vibração de uma membrana ou uma estrutura é reduzido para obter a matriz (muito grande).

Autovalores e Autovetores: Para que são para

Compreender os autovalores e autovetores de uma transformação linear é um problema fundamental em muitas áreas de física e engenharia.

Por exemplo, calcular os modos de vibração de uma membrana ou uma estrutura é reduzido para obter a matriz (muito grande).

Em Estadística, os autovalores e autovetores são muito usados para:

- Substituir uma matriz quadrática positiva definida por uma de menor posto.
- Calcular potências A^k de matrizes quadradas, como aquelas que aparecem em cadeias de Markov.

Autovalores: como são calculados

Suponha que nossa transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tenha como matriz associada a matriz A.Lembre -se de que isso significa que:

$$T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}, \quad \text{qualquer que seja o vetor } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Um número real λ é um valor próprio de T se e somente se houver um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ diferente de $\mathbf{0}$, de modo que $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ ou o mesmo:

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Autovalores: como são calculados

Suponha que nossa transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tenha como matriz associada a matriz A.Lembre -se de que isso significa que:

$$T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}, \quad \text{qualquer que seja o vetor } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Um número real λ é um valor próprio de T se e somente se houver um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ diferente de $\mathbf{0}$, de modo que $T(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ ou o mesmo:

$$A\,\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Isso é equivalente a que o seguinte sistema de equações:

$$(A - \lambda \,\mathrm{Id})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

tenha uma solução diferente para à solução trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. E, portanto, ter soluções infinitas, sendo este um sistema homogêneo.

Autovalores: como são calculados

Suponha que nossa transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tenha como matriz associada a matriz A.Lembre -se de que isso significa que:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \text{qualquer que seja o vetor } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Um número real λ é um valor próprio de T se e somente se houver um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ diferente de $\mathbf{0}$, de modo que $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ ou o mesmo:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Isso é equivalente a que o seguinte sistema de equações:

$$(A - \lambda \operatorname{Id})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

tenha uma solução diferente para à solução trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. E, portanto, ter soluções infinitas, sendo este um sistema homogêneo.
Isso ocorre se e somente se a matriz $A - \lambda \operatorname{Id}$ **não** for invertível. Isto é, dizer:

λ é um valor próprio de T se e somente se:

$$\det(A - \lambda \operatorname{Id}) = 0$$

o polinômio característico de $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

Como na transparência anterior, A é a matriz de T: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
A quantidade $\det(A - \lambda \operatorname{Id})$ é sempre um polinômio na variável λ de grau tanto d.

o polinômio característico de $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

Como na transparência anterior, A é a matriz de T: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

A quantidade $\det(A - \lambda\,\mathrm{Id})$ é sempre um polinômio na variável λ de grau tanto d.

Por exemplo, sim

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

então

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

o polinômio característico de $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

Como na transparência anterior, A é a matriz de T: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
A quantidade $\det(A - \lambda\,\mathrm{Id})$ é sempre um polinômio na variável λ de grau tanto d.
Por exemplo, sim

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

então

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

polinômio característico de T é polinômio no desconhecido λ:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{Id}).$$

As raízes polinomiais características são os autovalores de T.

Existem transformações lineares que não têm perigos

Considere a transformação de $\mathbb{R}^2$ correspondente a uma virada em torno da origem do ângulo $\pi/2$ no sentido anti-horário. É dado por:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

E não tem valor próprio. O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

Isso não tem raízes reais. Como os autovalores são as raízes do polinômio característico, ele não tem valor próprio.

Existem transformações lineares que não têm perigos

Considere a transformação de $\mathbb{R}^2$ correspondente a uma virada em torno da origem do ângulo $\pi/2$ no sentido anti-horário. É dado por:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

E não tem valor próprio. O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

Isso não tem raízes reais. Como os autovalores são as raízes do polinômio característico, ele não tem valor próprio.

No entanto, $\lambda^2 + 1$ tem raízes complexas $\pm i = e^{\pm i\pi/2}$. Não é difícil ver que a presença de raízes complexas $\lambda \in \mathbb{C}$ no polinômio característico de uma transformação $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ corresponde ao fato de que a transformação linear atua em um certo plano de $\mathbb{R}^d$ como uma curva de ângulo $\mathrm{Arg}(\lambda)$ seguida por uma homotecia de raciocínio $|\lambda|$. Mas não veremos neste aula.

Autovalores: alguns exercícios

Exercício. Mostre que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tem muito d autovalores. O que tem que acontecer para que o número de autovalores seja estritamente menor que d?

Autovalores: alguns exercícios

Exercício. Mostre que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tem muito d autovalores. O que tem que acontecer para que o número de autovalores seja estritamente menor que d?

Solução. Os autovalores de T são as raízes de seu polinômio característico $p(\lambda)$. Vimos que p é um polinômio de grau d.Portanto, não pode ter mais do que d raízes, porque, caso contrário, seu grau seria estritamente maior que d.

Autovalores: alguns exercícios

Exercício. Mostre que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tem muito d autovalores. O que tem que acontecer para que o número de autovalores seja estritamente menor que d?

Solução. Os autovalores de T são as raízes de seu polinômio característico $p(\lambda)$. Vimos que p é um polinômio de grau d.Portanto, não pode ter mais do que d raízes, porque, caso contrário, seu grau seria estritamente maior que d.

O número de autovalores de T será estritamente menor que d se alguma das raízes polinomiais características:

- é um número complexo
- tem multiplicidade maior que 1 Isso significa que, na fatoração de $p(\lambda)$, um termo do formulário aparece

$$(a - \lambda)^k \quad \text{com } k > 1.$$

Autovalores: alguns exercícios

Exercício. Demonstra o seguinte: Se a matriz A da transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ for uma matriz triangular (superior ou inferior), os autovalores de T são precisamente os elementos da diagonal de A.

Autovalores: alguns exercícios

Exercício. Demonstra o seguinte: Se a matriz A da transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ for uma matriz triangular (superior ou inferior), os autovalores de T são precisamente os elementos da diagonal de A.

Solução. Se A for triangular superior ou inferior, o mesmo acontece com a matriz $A - \lambda\,\mathrm{Id}$, qualquer que seja o valor λ.
Portanto, sendo uma matriz triangular, o determinante de $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ (que é o polinômio característico de T) coincide com o produto dos elementos da diagonal de $A - \lambda\,\mathrm{Id}$:

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{dd} - \lambda).$$

Portanto, o polinômio característico de T tem precisamente as raízes dos números:

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{dd}.$$

Como as raízes polinomiais características são os autovalores de T, demonstramos o que eles nos pediram.

Autovalores: alguns exercícios

Exercício. Temos uma transformação linear que possui uma matriz associada

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule seu autovalores. Para cada valor próprio, o carro associado obteve uma base.

Autovalores: alguns exercícios

Exercício. Temos uma transformação linear que possui uma matriz associada

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule seu autovalores. Para cada valor próprio, o carro associado obteve uma base.

Solução. Começamos calculando o polinômio característico de T:

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Esse determinante pode ser resolvido com a regra de Sarrus, mas é aconselhável realizar operações por fileiras e/ou colunas (as regras de gerenciamento determinantes nos permitem) para simplificar o cálculo do determinante.

Então,

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 9-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2(9-\lambda) = 0$$

Você não deve expandir o produto anterior. Lembre -se de que o que queremos é calcular as raízes do polinômio característico. Se ao calcular, ele já foi dado como um produto dos polinômios de grau um, o cálculo das raízes é imediato.

Então,

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 9-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2(9-\lambda) = 0$$

Você não deve expandir o produto anterior. Lembre -se de que o que queremos é calcular as raízes do polinômio característico. Se ao calcular, ele já foi dado como um produto dos polinômios de grau um, o cálculo das raízes é imediato.

Assim, temos dois autovalores diferentes, $\lambda_1 = 2$ com multiplicidade dois (é uma raiz dupla do polinômio) e $\lambda_2 = 9$ com multiplicidade 1.

Agora, calculamos os autoespaços, ou seja, os autovetores associados aos autovalores que obtivemos usando o polinômio. Começamos com quem tem multiplicidade 1. O espaço será o conjunto de soluções do seguinte sistema de equações homogêneas:

$$(A - \lambda_2 \, \mathrm{Id})\mathbf{v} = (A - 9 \, \mathrm{Id})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema anterior por Gauss, conseguimos isso

$$S_9 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : 2x - y - z = y - z = 0 \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Repetimos o processo para $\lambda_1 = 2$ que tem multiplicidade igual a dois. Resolvendo o sistema homogêneo

$$(A - 2\,\mathrm{Id})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nós conseguimos:

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : 2x - y + 6z = 0 \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Autovetores: como calculá-los

Acabamos de ver em um exemplo de como calcular as autovetores de uma transformação linear. Em geral, se λ é um valor próprio da transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ com matriz A, o autoespaço associado calcula a solução do sistema homogêneo:

$$(A - \lambda \, \mathrm{Id})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Lembre-se de que escrevemos S_λ para nos referir ao conjunto de todas as soluções deste sistema. Como λ é um valor próprio, segue-se que:

$$\dim S_\lambda \geq 1.$$

Por outro lado, o seguinte pode ser demonstrado:

$\dim S_\lambda \leq$ multiplicidade de λ como a raiz do polinômio característico de T.

Às vezes, a desigualdade é rigorosa

Abaixo, apresentamos um exemplo de uma transformação linear com a propriedade de que ela possui um autoespaço de dimensão estritamente menor que a multiplicidade do autovalor.

Tomamos $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de T é $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2$.Possui uma única raiz $\lambda = 1$ de **Multiplicidade** 2.
Os autovetores associados ao valor de autovalor $\lambda = 1$ são soluções de:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto $S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ que é um subespaço **da dimensão um**.

Transformações diagonalizáveis

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é **diagonalizável** se você puder encontrar uma base de $\mathbb{R}^d$ formado pelo autovetor T.

Transformações diagonalizáveis

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é **diagonalizável** se você puder encontrar uma base de $\mathbb{R}^d$ formado pelo autovetor T.

A transformação da transparência anterior **NÃO** é diagonalizável:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{tem um único valor próprio } \lambda = 1;$$

Mas o espaço automático associado a esse valor único, S_1 tem uma dimensão.

Portanto, é impossível encontrar uma base de $\mathbb{R}^2$ formado por autovalores de T.

Transformações diagonalizáveis

A transformação $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Sim é diagonalizável.

Transformações diagonalizáveis

A transformação $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Sim é diagonalizável. Vimos anteriormente que ele tem dois autovalores, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 9$;Os auto -aspacios associados em conformidade:

$$\dim S_2 = 2, \quad \dim S_9 = 1.$$

Portanto, é possível encontrar duas autovetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ associadas ao valor próprio $\lambda_1 = 2$ que são linearmente independentes.

Se $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$ é um autovetor associado ao valor próprio $\lambda_2 = 9$, então:

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \text{ é uma base de} \mathbb{R}^3,$$

formado por auto -vetor T.

Critério para uma transformação linear a ser diagonalizável

Em vista do que vimos antes, há os seguintes critérios que garantem que uma transformação linear seja diagonalizável.

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é diagonalizável se e somente se estiver em conformidade:

1. A soma das multiplicidades das raízes polinomiais características de T é igual a d.
2. Para cada raiz λ do polinômio característico (isto é, para cada autovalor) de T, os autoespaços S_λ cumprem isso:

$$\dim S_\lambda = \text{ Multiplicidade de } \lambda.$$

um caso importante

Suponha que $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ seja uma transformação linear cuja matriz associada A seja simétrica: $A = A^T$. Nesse caso, é cumprido:

- T é diagonalizável.
- Sim $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são duas autovetores que correspondem a dois autovalores que não T então:

$$(\mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2 = 0.$$

Matriz associada a uma transformação diagonalizável

Suponha agora que $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ seja diagonalizável. Vamos ver que a matriz A associada a T pode **diagonalizar**.

Suponha que $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_d$ sejam os autovalores de T (se estes não forem diferentes, temos sua multiplicidade). Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_d\}$ uma base de $\mathbb{R}^d$ formada por autovetores de T.

Construímos a matriz Q (do cambio de base) cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_d$:

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_d \end{array} \right].$$

Então:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{bmatrix} = Q^{-1} A\, Q.$$

demonstração

Vamos chamar D a matriz que tem na diagonal os sinais de T e zero no restante de suas entradas.

Queremos ver que $D = Q^{-1} A\, Q$ ou, o que é o mesmo:

$$Q\, D = A\, Q.$$

demonstração

Vamos chamar D a matriz que tem na diagonal os sinais de T e zero no restante de suas entradas.
Queremos ver que $D = Q^{-1}A\,Q$ ou, o que é o mesmo:

$$Q\,D = A\,Q.$$

Para ver que isso é verdade, vamos comparar as colunas das matrizes que estão em ambos os lados da igualdade. Fazemos isso na primeira coluna, o restante é tratado de forma análoga.

demonstração

Vamos chamar D a matriz que tem na diagonal os sinais de T e zero no restante de suas entradas.
Queremos ver que $D = Q^{-1} A\, Q$ ou, o que é o mesmo:

$$Q\, D = A\, Q.$$

Para ver que isso é verdade, vamos comparar as colunas das matrizes que estão em ambos os lados da igualdade. Fazemos isso na primeira coluna, o restante é tratado de forma análoga.
A primeira coluna de $A\, Q$ é igual a $A\,(1 \text{ col.de } Q)$:

$$A\, \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1.$$

A primeira coluna de $Q\, D$ é $Q\,(1 \text{ col.de } D)$.Isso é:

$$Q \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 Q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1.$$

Aplicação: Cálculo das potências de uma matriz

Suponha que A seja a matriz associada a uma transformação linear diagonalizável. Encontre uma fórmula simples para A^k.

Aplicação: Cálculo das potências de uma matriz

Suponha que A seja a matriz associada a uma transformação linear diagonalizável. Encontre uma fórmula simples para A^k.

Solução. Seja D diagonal e Q como na transparência anterior. Então:

$$D = Q^{-1} A\, Q, \qquad \text{ou equivalentemente } Q\, D\, Q^{-1} = A.$$

Então,

$$A^2 = Q\, D\, Q^{-1} Q\, D\, Q^{-1} = Q\, D^2\, Q^{-1}$$

E, em geral,

$$A^k = \underbrace{Q\, D\, Q^{-1} Q\, D\, Q^{-1} \cdots Q\, D\, Q^{-1}}_{k \text{ términos}} = Q\, D^k\, Q^{-1}$$

Aplicação: Números de Fibonacci

Os números de Fibonacci são definidos por uma fórmula recursiva:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

e casos base

$$F_0 = F_1 = 1.$$

Aplicação: Números de Fibonacci

Os números de Fibonacci são definidos por uma fórmula recursiva:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

e casos base

$$F_0 = F_1 = 1.$$

Também podemos defini-los usando matrizes:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Números de Fibonacci

Os números de Fibonacci são definidos por uma fórmula recursiva:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

e casos base

$$F_0 = F_1 = 1.$$

Também podemos defini-los usando matrizes:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A vantagem de definir os números dessa maneira é que é facilmente deduzido que:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para alcançar uma fórmula explícita para o n-ésimo número de Fibonacci, precisamos apenas elevar uma matriz a uma potência.

O truque é diagonalizar a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = U \cdot D \cdot U^{-1}$$

Para alcançar uma fórmula explícita para o n-ésimo número de Fibonacci, precisamos apenas elevar uma matriz a uma potência.
O truque é diagonalizar a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = U \cdot D \cdot U^{-1}$$

Encontramos os autovalores

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda\,\mathrm{Id}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Para alcançar uma fórmula explícita para o n-ésimo número de Fibonacci, precisamos apenas elevar uma matriz a uma potência.
O truque é diagonalizar a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = U \cdot D \cdot U^{-1}$$

Encontramos os autovalores

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda\, \mathrm{Id}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para alcançar uma fórmula explícita para o n-ésimo número de Fibonacci, precisamos apenas elevar uma matriz a uma potência.
O truque é diagonalizar a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = U \cdot D \cdot U^{-1}$$

Encontramos os autovalores

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda\, \mathrm{Id}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} = U \cdot D^n \cdot U^{-1} = U \cdot \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)^{n-2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{bmatrix} \cdot U^{-1}$$

Operando e simplificando:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-} \end{array} \right.$$

Então

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Operando e simplificando:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix}$$

Então

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Isso não é uma curiosidade arcaica, esse procedimento funciona para qualquer equação de diferença, que é usada muito em economia e biologia... e para estudar **cadeias de Markov**.

O aspecto da equação indica que encontrar fórmulas desse tipo não é trivial.

Aplicação: Projeção ortogonal

Seja $P_S : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ a transformação linear de que um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ associa sua projeção ortogonal $P_S(\mathbf{x})$ em um subespaço vetorial $S \subseteq \mathbb{R}^d$.

- se os autovalores e autovetores de P_S.
- é sempre diagonalizável?