Álgebra linear

Universidade Pedagogica de Maputo

Folha 3. Dependência linear, independência linear

1. Em $\mathbb{R}^4$ Os vetores são considerados:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \rho \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \rho \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \rho \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde $\rho \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.Encontre a dimensão e uma base do subespaço vetorial gerado pelos quatro vetores, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$.

2. Para vetores do exercício anterior e o valor do parâmetro $\rho = 2$ a base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ de $\mathbb{R}^4$ é considerada.Encontre as coordenadas nesta base de um vetor genérico $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

3. Encontre a dimensão e uma base do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ formado por todas as soluções do sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Repita o exercício anterior para o subespaço:

$$\{(x, y, z, w) : x - w + z = 0\}.$$

5. Encontre uma base e calcule a dimensão do subespaço E de $\mathbb{R}^2$ gerado por vetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encontre um sistema de equações homogêneas para que o conjunto de todas as suas soluções coincide com E.

6. Repita o exercício anterior se E for:

   (a) O subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por vetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix};$$

(b) O subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por vetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix};$$

(c) O subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por vetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

7. Se $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_5}$ é uma base de um subespaço vetorial E de $\mathbb{R}^d$, pode ser $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_7}$ também uma base de E?Justifique a resposta.

8. Se $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ é a base de um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$, é possível atender $\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} = \mathbf{0}$?Justifique a resposta.

9. Os seguintes sistemas geram o mesmo espaço vetorial?

$$S_1 = \{(1,1,0),(1,2,0)\} \quad S_2 = \{(1,3,0),(1,5,0)\}.$$

E o seguinte?

$$S_1 = \{(1,1,1),(1,2,0)\} \quad S_2 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}.$$

10. Suponha que os vetores $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ gerem um espaço vetorial E de $\mathbb{R}^d$.A dimensão de E é maior, menor ou igual a 3?Justifique a resposta.

11. Consideramos os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e_1} = (1,1,1), \mathbf{e_2} = (1,1,2), \mathbf{e_3} = (1,2,3), \mathbf{x} = (6,9,14).$$

Mostre que os vetores $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$ e encontram as coordenadas de $\mathbf{x}$ nessa base.

12. determinar o valor dos parâmetros a e b para que o vetor $(1,0,a,b)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $(1,4,-5,2)$ e $(1,2,3,-1)$.

13. Encontre uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo vetores $(1,1,0,2)$ e $(1,-1,2,0)$.

14. em $\mathbb{R}^3$ Os vetores são considerados $(1,1,a),(1,a,1),(a,1,1)$.Estudo, dependendo de a, a dimensão do subespaço gerada por esses vetores.

15. Find a basis for the subspace of $\mathbb{R}^4$ whose parametric equations are

$$x_1 = \lambda + \alpha + \beta \quad x_2 = \lambda - \alpha + 3\beta \quad x_3 = \lambda + 2\alpha \quad x_4 = 2\lambda + 3\alpha + \beta$$

onde α, β, λ eles levam todos os valores reais possíveis.

Qual é a sua dimensão?

16. O vetor pertence $\mathbf{v} = (2, 4, 0, 2)$ ao próximo subespaço de $\mathbb{R}^4$?

$$V = \{(x, y, z, t) : x - y + z - t = 0, y - z = 0\}$$

Calcule uma base do referido subespaço.Qual é a sua dimensão?

17. Um polinômio $p(x)$ de grau no máximo dois pode ser escrito como:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

ou, dado $c \in \mathbb{R}$, como

$$p(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2.$$

Por exemplo, $p(x) = x^2$ também é escrito como $p(x) = b_2(x - c)^2 + b_1(x - c) + b_0$ com $b_2 = 1$, $b_1 = 2c$ e $b_0 = c^2$.

Encontre matrizes A, B três por três para que

$$A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

e

$$B \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

18. (mais difícil) generalize o exercício antes do caso de polinômios de grau no máximo n.

19. Existem valores de x E y, de modo que o vetor $(1, 2, x, y)$ seja a combinação linear de vetores $(1, 1, 0, 2)$ e $(1, 1, 2, 3)$?

20. Consideramos a seguinte família de vetores de $\mathbb{R}^4$.

$$(1, 3, 0, -1), (2, -1, 1, 1), (1, 2, 1, 0), (0, 3, 0, -1), (0, 0, 0, 0), (2, 2, 1, 0).$$

Qual é a dimensão do espaço vetorial gerado por esses vetores?Remova desses vetores uma base para o referido subespaço.

21. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz, de dimensões $m \times n$ e $m \leq n$.Nós sabemos disso:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1(j\neq i)}^{m} |a_{ij}|$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Verifique se o intervalo de A é m

22. Tente resolver o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando os seguintes vetores como colunas de A:

$$\mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Dê uma interpretação geométrica do resultado.

23. Como o exercício anterior, mas com

$$\mathbf{w_1} = (1, 2, 0)^T, \mathbf{w_2} = (2, 5, 0)^T, \mathbf{w_3} = (0, 0, 2)^T, \mathbf{w_4} = (0, 0, 0)^T,$$

e $\mathbf{b}$ qualquer vetor.

24. Dê uma interpretação geométrica do espaço gerado pelas colunas das matrizes A, A^T e A^2 com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

25. Seja V o espaço vetorial que forma todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com operações usuais.As funções definidas da seguinte maneira são consideradas:

$$\phi_1(t) = \sin(t) \quad \phi_2(t) = \cos(t) \quad \phi_3(t) = \sin^2(t) \quad \phi_4(t) = \cos^2(t)$$

Verifique se essas quatro funções são linearmente independentes e formam uma base com elas.Que dimensão o subespaço gerado com esta base tem?

26. Deixe $\mathcal{P}_n(x)$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n.Mostre que o Polinomial x^n e seus n primeiro derivados formam uma base do referido espaço.

27. Calcule as coordenadas dos polinômios $p_1(x) = 1 + 3x + 5x^2$, $p_2(x) = -1 + 2x^2$ e $p_3(x) = 3 + 3x + x^2$ na base anterior.Esses três polinômios linearmente independentes?Que dimensão o subespaço gerado por eles tem?Y Si añadimos el polinomio $p_4(x) = x^2$?

28. Encontre uma base dos subespaços $A + B$ e $A \cap B$ de $\mathbb{R}^4$, onde

$$A = \{(x, y, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, B = \{(z, z, w, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$$

29. Encontre uma base dos subespaços $A + B$ e $A \cap B$ de $\mathbb{R}^4$, onde

$$A = \{(x, y, z, w) : x - y + z - w = 0\}, B = \{(t, t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

30. Encontre uma base dos subespaços $A + B$ e $A \cap B$ de $\mathbb{R}^4$, onde

$$A = \{(x, y, z, w) : x - y + z - w = 0\}, B = \{(x, y, z, w) : x + y - z - w = 0\}$$

31. Deixe $\mathcal{P}_{10}(x)$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 10. Definimos vários subconjuntos de $\mathcal{P}_{10}(x)$:

   - $\mathcal{PI}_{10}(x)$ É o conjunto de polinômios menor ou igual a 10 que só têm poderes estranhos de x
   - $\mathcal{PP}_{10}(x)$ É o conjunto de polinômios menor ou igual a 10 que só têm poderes de x
   - $\mathcal{P}_5(x)$ como polinômios menores ou iguais a 5.
   - $\mathcal{P}^1_{10}(x)$ como polinômios menores ou iguais a 10 que são anulados em $x = 0$.

   Calcule a dimensão de cada um dos seguintes subespaços:

   - $\mathcal{PI}_{10}(x) \cap \mathcal{P}_5(x)$
   - $\mathcal{PI}_{10}(x) + \mathcal{P}_5(x)$
   - $\mathcal{PI}_{10}(x) \cap \mathcal{PP}_{10}(x)$
   - $\mathcal{PI}_{10}(x) + \mathcal{PP}_{10}(x)$
   - $\mathcal{P}^1_{10}(x) \cap \mathcal{P}_5(x)$
   - $\mathcal{P}^1_{10}(x) + \mathcal{P}_5(x)$
   - $\mathcal{PI}_{10}(x) \cap \mathcal{P}^1_{10}(x) \cap \mathcal{P}_5(x)$
   - $\mathcal{PI}_{10}(x) + \mathcal{P}^1_{10}(x) + \mathcal{P}_5(x)$