Álgebra linear
Universidade Pedagogica de Maputo

Teste 1. 21 de julho de 2025

Sobrenome, nome e numero de identificação:

AVISO: Escreva sua resposta <u>somente</u> neste fólio.

Para um exercício para receber a pontuação, tanto a resposta quanto a abordagem e a justificativa devem estar corretas.

A presença de notas, livros, telefones celulares, calculadoras e outros dispositivos eletrônicos não é permitido.

1. a Vamos A é a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (2,5p.)Calcule todas as potencias A^k para $k \geq 1$

(b) (2,5p.) Se M é una matriz $d \times d$ triangular superior e com 0 na todas as entradas da diagonal principal. Encontre M^d.

2. Uma pessoa precisa se alimentar de leite integral, leite desnatado, soja e surtos de pão inteiro. Cada porção de este alimento tem as seguintes quantidades de proteínas, gorduras e carboidratos (é possível adicionar frações de porções):

	proteínas	gorduras	carboidratos
Leite integral	3	3	4
Leite desnatada	3	0	4
Soja	6	1	4
Pão	6	4	40

(a) (1,5p.) Poste um sistema de equações lineares para encontrar todas as combinações possíveis de cada alimento que produzem uma dieta com 90 gramas de proteína, 54 gramas de gordura e 240 gramas de carboidratos.

(b) (2p.) Resolva o sistema de equações anteriores.

(c) (1,5p.) No conjunto de soluções obtidas: Existe pelo menos uma solução com todos os valores positivos?

Solução detalhada para o Problema 1: *Resposta à seção (a).* Calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Qualquer outra potência da matriz A será a matriz zero, porque se $k > 3$:

$$A^k = A^3 \cdot A^{k-3} = 0 \cdot A^{k-3} = 0$$

Resposta à seção (b). Aquecimento: Chamaremos a una matriz $d \times d$ M *triangular superior +1* se $a_{i,j} = 0$ sempre que $i > j - 1$ (em outras palavras: é una matriz $d \times d$ triangular superior e com 0 na todas as entradas da diagonal principal.).

De forma semelhante a como provamos que o produto de duas matrizes triangulares superiores também é triangular superior, provamos que o produto de duas matrizes triangulares superiores $+1$ A e B também é triangular superior $+1$. Vamos $p_{ij} = \sum_{k=1}^{d} a_{ik} bkj$ um elemento da matriz produto $A \cdot B$, com $i > j - 1$. Então:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{d} a_{ik} bkj = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} bkj + \sum_{k=i+1}^{d} a_{ik} bkj$$

Vemos que todos os adendos da primeira soma são nulos porque $a_{ik} = 0$, dado que os números de fileira i e coluna k satisfazem $i > k - 1$ para todos os adendos.

Igualmente, todos os adendos da segunda soma são nulos porque $b_{kj} = 0$, dado que os números de fileira k e coluna j satisfazem $k > j - 1$ para todos os adendos, dado que $k > i > j - 1$.

Resposta à seção (b).

Chamaremos a una matriz $d \times d$ M *triangular superior* $+m$ se $a_{i,j} = 0$ sempre que $i > j - m$ (em outras palavras: é una matriz $d \times d$ triangular superior e com 0 na todas as entradas das m diagonais da matriz começando na principal para cima).

De forma semelhante a como provamos que o produto de duas matrizes triangulares superiores também é triangular superior, vamos provar que o produto de uma matriz triangular superior $+m$ e uma matriz triangular superior $+1$ é uma matriz triangular superior $+m + 1$.

Vamos A uma matriz triangular superior $+m$ e B uma matriz triangular superior $+1$. Vamos $p_{ij} = \sum_{k=1}^{d} a_{ik} bkj$ um elemento da matriz produto $A \cdot B$, com $i > j - m - 1$. Então:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{d} a_{ik} bkj = \sum_{k=1}^{i+m-1} a_{ik} bkj + \sum_{k=i+m}^{d} a_{ik} bkj$$

Vemos que todos os adendos da primeira soma são nulos porque $a_{ik} = 0$, dado que os números de fileira i e coluna k satisfazem $i > k - m$ para todos os adendos.

Igualmente, todos os adendos da segunda soma são nulos porque $b_{kj} = 0$, dado que os números de fileira k e coluna j satisfazem $k > j - 1$ para todos os adendos, dado que $k \geq i + m > j - 1$.

De esta maneira, provamos que A^m é triangular superior $+m$, então A^d é triangular superior $+d$, que implica que A^d é a matriz nula.

Comentário à seção (b). Uma matriz não nula tal que uma potência sua é nula dize-se **matriz nilpotente**: Mais acerca das matrizes nilpotentes nelo livro do curso ou nela wikipedia: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz_nilpotente`

Solução detalhada para o Problema 2: *Resposta à seção (a).* Queremos saber as quantidades de cada alimento que uma pessoa deve tomar para alcançar os nutrientes necessários de cada tipo. Para isso, definimos as variáveis:

l : quantidade de leite integral

d : quantidade de leite desnatado

s : Quantidade de brotos de soja

p : quantidade de pão

A quantidade total de proteínas que é ingerida se l forem tomadas unidades de leite integral, d unidades de leite desnatado, s unidades de surto de soja e p é $3l + 3d + 6s + 6p$.

Dessa forma, propomos um sistema de equações para que as quantidades de proteínas, gorduras e carboidratos sejam os necessários:

$$\left\{\begin{array}{lllll} 3l & +3d & +6s & +6p & =90 \\ 3l & & +s & +4p & =54 \\ 4l & +4d & +4s & +40p & =240 \end{array}\right.$$

Resposta à seção (b). Para resolver o sistema de equações que primeiro usamos o método Gauss para encontrar um sistema de equações escalonadas com as mesmas soluções.

1. Substituímos a segunda equação, por si só, exceto a primeira equação.
2. Substituímos a terceira equação, por si só menos $\frac{3}{4}$ vezes a primeira equação.

Chegamos a um sistema escalonado com as mesmas soluções:

$$\left\{\begin{array}{lllll} 3l & +3d & +6s & +6p & =90 \\ & -3d & -5s & -2p & =-36 \\ & & -4s & +32p & =120 \end{array}\right.$$

Esse sistema escalonado possui uma variável livre (a variável p) e três variáveis vinculadas, o conjunto de soluções pode ser expresso de maneira paramétrica, dependendo de p. Para fazer isso, limpamos l, d e s usando as três equações:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} s & = & -30+8p & & \\ d & = & 12-\frac{5}{3}s-\frac{2}{3} & = & 62-14p \\ l & = & 30-d-2s-2p & = & 28-4p \end{array}\right.$$

Agora podemos escrever as soluções de maneira paramétrica:

$$Sols = \{(28-4p, 62-14p, -30+8p, p), p \in \mathbb{R}\}$$

Resposta à seção (c). Para uma solução para corresponder a uma possível dieta, a quantidade de cada alimento deve ser um número positivo.Especificamente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 28-4p & > & 0 \\ 62-14p & > & 0 \\ -30+8p & > & 0 \\ p & > & 0 \end{array}\right.$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} p & < & 7 \\ p & < & \frac{62}{14} \approx 4.4 \\ p & > & \frac{30}{8} = 3.75 \\ p & > & 0 \end{cases}$$

Se o parâmetro p assumir o valor 4, todas as desigualdades serão satisfeitas.A solução correspondente é:

l : 12 Unidades de leite integral

d : 6 Unidades de leite desnatado

s : 2 Unidades de soja

p : 4 Unidades de pão

A variante das lentilhas era similar, mas não era possível encontrar a dieta requerida com quantidades positivas de cada alimento... faltava algum alimento com muita gordura `:-/`

Podemos fazer os cálculos nelo website `https://www.cancamusa.net/sage/linear_system.html`