Álgebra linear
Universidade Pedagogica de Maputo

Teste 2. 28 de julho de 2025

Sobrenome, nome e numero de identificação:

AVISO: Escreva sua resposta somente neste fólio.

Para que um exercício receba a pontuação, tanto a resposta quanto a abordagem e a justificativa devem estar corretas.

A presença de notas, livros, telefones celulares, calculadoras e outros dispositivos eletrônicos não é permitido.

1. (2,5 pontos) (por exigência popular). Um professor deve eleger quanto tempo dedicar aos três temas 1, 2 e 3. Inocentemente, pregunta aos estudantes, e recebe solicitações contraditórias. Se $t1, t2, t3$ e a tempo dedicado a cada tema, diferentes estudantes solicitam que sejam seguidas estas recomendações:

$$\begin{array}{cccccc} t_1 & +t_2 & & = & 5 \\ t_1 & +t_2 & +t_3 & = & 9 \\ t_1 & & +t_3 & = & 8 \\ & t_2 & +t_3 & = & 7 \\ & & +t_3 & = & 3 \end{array}$$

Parece claro que a única maneira de satisfazer a os estudantes é usar o método de mínimos quadrados. Encontre a solução de este sistema em o sentido de mínimos quadrados.

2.. Vamos $S = \langle (0,1,1,0), (1,-1,1,0), (1,1,3,0) \rangle$ um subespaço de $\mathbf{R}^4$, e $T = \{\alpha x + y - z - t = 0\}$ é um otro subespaço que depende de um parâmetro $\alpha \in \mathbf{R}$.

- **(a. 1 ponto)** Calcule a dimensão do suplementário ortogonal $S^{\perp}$ de S.
- **(b. 2 ponto)** Para $\alpha = 2$, calcule a projeção do vetor $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ sobre T.
- **(c. 2 pontos)** Encontre equações para o subespaço $S \cap T$ e calcule sua dimensão em função do parâmetro α.

3 (2,5 pontos). Encontre una referência afim para o subespaço $T = \{\alpha x + y - z - t = 1\}$, como função do parâmetro α.

4. (Recuperação de sistemas lineares de equações). Aos coeficientes $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$ de um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ de grado menor o igual que 2 associamos os coeficientes do polinômio $q(x) = p'(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, a derivada do polinômio $p(x)$.

- Expresse o vector $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2)$ com os coeficientes de $q(x)$ nela forma $\mathbf{b} = B \cdot \mathbf{a}$, para uma matriz B.
- Calcule B^k para qualquer valor de $k \geq 1$.
- Repita o primeiro apartado para os polinômios de grado $\leq n$, e calcule B^{n+1}.

Solução detalhada para o Problema 1: A matriz de coeficientes do sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e o vetor de termos independentes é

$$\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Definimos um vetor com as incógnitas

$$\mathbf{t}^T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix}$$

O sistema $A \cdot \mathbf{t} = \mathbf{b}$ não tem soluções clássicas, mas admite soluções no sentido do mínimos quadrados: $A^T \cdot A \cdot \mathbf{t} = A^T \cdot \mathbf{b}$:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, A^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \frac{19}{6} \\ \frac{13}{6} \\ \frac{49}{12} \end{pmatrix}$$

Solução detalhada para o Problema 2 a:

$S^{\perp}$ está formado por aqueles vetores de $\mathbb{R}^4$ que sejam ortogonais a todos os vetores de S, e é suficiente exigir que sejam ortogonais aos geradores:

$$S^{\perp} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aplicando o método de Gauss (você pode usar `https://www.cancamusa.net/sage/linear_system.html`):

$$S^{\perp} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dado que chegamos a um sistema escalonado de duas equações, o sistema tem duas variáveis ligadas e duas livres. Então $S^{\perp}$ tem dimensão 2, igual ao número de variáveis livres.

Solução detalhada para o Problema 2 b: Observamos que T é um subespaço vetorial dado por a equação $\{2x + y - z - t = 0\}$. Esto implica que $T^{\perp}$ está gerado por $(2, 1, -1, -1)$.

Dado que é equivalente calcular a projeção sobre T ou sobre $T^{\perp}$, vamos a calcular a projeção sobre $T^{\perp}$. É mais fácil calcular $p_{T^{\perp}}\mathbf{v}$, a projeção sobre $T^{\perp}$, dado que $dim(T^{\perp}) = 1$, então é isso que vamos a calcular.

Encontramos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}\}$ para $T^{\perp}$ tomando qualquer vetor de $T^{\perp}$ e dividindo-o pela sua norma.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A projeção de v sobre $T^{\perp}$ é:

$$p_{T^{\perp}}\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Então a projeção de $\mathbf{v}$ sobre T é

$$p_T\mathbf{v} = \mathbf{v} - p_{T^{\perp}}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/7 \\ 1/7 \\ -1/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 6/7 \\ 8/7 \\ 8/7 \end{pmatrix}$$

Solução detalhada para o Problema 2c: Nós lembramos que

$$S^{\perp} = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

e deduzimos que:

$$S^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Então

$$S = \{-2x - y + z = t = 0\}$$

e

$$S\cap T = \{-2x - y + z = t = \alpha x + y - z - t = 0\}$$

Usando o método de Gauss,

$$S\cap T = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R} : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \rightarrow$$

$$\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha/2 & -1+\alpha/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

O sistema está escalonado. Se $\alpha = 2$, temos duas variáveis livres, então $dim(S\cap T) = 2$, e se $\alpha \neq 2$, temos só uma variável livre, então $dim(S\cap T) = 1$.

Solução detalhada para o Problema 3: O sistema está escalonado e tem exactamente uma variável ligada. Se $\alpha = 0$, $y = 1 + z + t$ está ligada, e o resto são livres.

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e uma referência afim e:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Se $\alpha \neq 0$, $x = \frac{1}{\alpha}(1 - y + z + t)$ está ligada e o resto são livres.

$$T = \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1/\alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e uma referência afim é:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/\alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Alternativa: Também era possível tomar $y = 1 - \alpha x + z + t$ como variável ligada sempre, para todo valor de α, encontrando esta referência afim:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Solução detalhada para o Problema 4: Temos que $q(x) = a_1 + 2a_2 x$, então:

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = B \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

É fácil comprovar que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

então $B^k = B^3 \cdot B^{k-3} = 0$ para $k \geq 4$.

Para polinômios de grado $\leq n$, temos $p(x) = \sum_j a_j x^j$, $q(x) = \sum_j a_j j x^{j-1}$. Então, si $B = (b_{ij})$, temos que

$$b_{ij} = \begin{cases} j & \text{se } j = i + 1 \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Vimos no exame anterior que B^n será a matriz 0. Também decorre do facto de que multiplicar os coeficientes do polinômio pela matriz B é a mesma cosa que derivar el polinômio, e então B^{n+1} é a matriz 0, dado que a derivada de ordem $n+1$ de um polinômio de grado menor ou igual que n é 0.