

**Álgebra linear**  
**Universidade Pedagógica de Maputo**

Teste 2.

28 de julho de 2025

Sobrenome, nome e número de identificação:

**AVISO:** Escreva sua resposta somente neste fólio.

Para que um exercício receba a pontuação, tanto a resposta quanto a abordagem e a justificativa devem estar corretas.

A presença de notas, livros, telefones celulares, calculadoras e outros dispositivos eletrônicos não é permitido.

1. **(Parte 3: 5 pontos)** Medimos o tempo  $t$  que demora a completar um determinado código de computador, como função do tamanho do input,  $x$ . Nosso conhecimento do tipo de operações envolvidas faz-nos pensar que " $t(x) = a + b \cdot x^3$ " seria um bom modelo, para alguns parâmetros  $a$  e  $b$ .

$x$	$t$
1	5
2	40
3	130
4	310

Ajuste o modelo que minimiza o erro quadrático total.

2. **(Parte 3: 5 pontos)** Um *random surfer* navega na web, saltando de uma página para outra. Medimos a probabilidade de visitar uma página num determinado minuto, dependendo da página que visitou no minuto anterior.

minuto $m + 1 \setminus$ minuto $m$	$W$	$F$	$O$
$W$	4/6	2/6	1/6
$F$	1/6	1/6	1/6
$O$	1/6	3/6	4/6

- Encontre uma matriz diagonal  $D$  e outra matriz  $Q$  de modo que a matriz das probabilidades de transição  $P$  se possa escrever como  $P = Q^{-1} \cdot D \cdot Q$ .
- Calcule  $P^{100}$ .

3a. **(Recuperação do parte 2: 5 pontos)**

- Calcule a projeção ortogonal do vetor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$  sobre o subespaço  $\{x + y + z + t = 0\}$ .

- Calcule a projeção ortogonal do vetor  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$  sobre o subespaço  $\{\sum_i^d x_i = 0\}$ .

3b. **(Recuperação do parte 2: 5 pontos)**

- Encontre a dimensão e uma referência afim para o conjunto  $F = \{x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = x_4 + x_1 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ .

- Vamos  $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$ . Determine a interseção de  $F$  e  $S$  e Calcule a dimensão para os diferentes valores do parâmetro  $a$ .

#### 4. (Recuperação do parte 1: 10 pontos)

- Encontre todos os polinômios  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  de grau menor ou igual a 3 que tem a propriedade que o valor de  $P(x)$  e o de todos os seus derivados até à ordem três no ponto  $x = 1$  coincidem com os valores correspondentes para a função exponencial  $f(x) = e^x$ . Em outras palavras, queremos que  $P(x)$  cumpra isso:

$$P(1) = f(1), P'(1) = f'(1), P''(1) = f''(1), P'''(1) = f'''(1), \text{ ser } f(x) = e^x.$$

- Descreva o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a  $n$  que tem a propriedade que o valor de  $P(x)$  e de todos os seus derivados até à ordem três no ponto  $x = 1$  coincidem com os valores correspondentes para a função exponencial  $f(x) = e^x$ .