

Álgebra linear
Universidade Pedagógica de Maputo

Teste final.

1 de agosto de 2025

Sobrenome, nome e número de identificação:

AVISO: Escreva sua resposta somente neste fólio.

Para que um exercício receba a pontuação, tanto a resposta quanto a abordagem e a justificativa devem estar corretas.

A presença de notas, livros, telefones celulares, calculadoras e outros dispositivos eletrônicos não é permitido.

1. **(Parte 3: 5 pontos)** Medimos o tempo t que demora a completar um determinado código de computador, como função do tamanho do input, x . Nosso conhecimento do tipo de operações envolvidas faz-nos pensar que “ $t(x) = a + b \cdot x^3$ ” seria um bom modelo, para alguns parâmetros a e b .

x	t
1	5
2	40
3	130
4	310

Ajuste o modelo que minimiza o erro quadrático total.

2. **(Parte 3: 5 pontos)** Um *random surfer* navega na web, saltando de uma página para outra. Medimos a probabilidade de visitar uma página num determinado minuto, dependendo da página que visitou no minuto anterior.

minuto $m + 1 \setminus$ minuto m	W	F	O
W	4/6	2/6	1/6
F	1/6	1/6	1/6
O	1/6	3/6	4/6

- Encontre uma matriz diagonal D e outra matriz Q de modo que a matriz das probabilidades de transição P se possa escrever como $P = Q^{-1} \cdot D \cdot Q$.
- Calcule P^{100} .

3a. **(Recuperação do parte 2: 5 pontos)**

- Calcule a projeção ortogonal do vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ sobre o subespaço $\{x + y + z + t = 0\}$.

- Calcule a projeção ortogonal do vetor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ sobre o subespaço $\{\sum_i^d x_i = 0\}$.

3b. **(Recuperação do parte 2: 5 pontos)**

- Encontre a dimensão e uma referência afim para o conjunto $F = \{x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = x_4 + x_1 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$.

- Vamos $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$. Determine a interseção de F e S e Calcule a dimensão para os diferentes valores do parâmetro a .

4. (Recuperação do parte 1: 10 pontos)

- Encontre todos os polinômios $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ de grau menor ou igual a 3 que tem a propriedade que o valor de $P(x)$ e o de todos os seus derivados até à ordem três no ponto $x = 1$ coincidem com os valores correspondentes para a função exponencial $f(x) = e^x$. Em outras palavras, queremos que $P(x)$ cumpra isso:

$$P(1) = f(1), P'(1) = f'(1), P''(1) = f''(1), P'''(1) = f'''(1), \text{ ser } f(x) = e^x.$$

- Descreva o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n que tem a propriedade que o valor de $P(x)$ e de todos os seus derivados até à ordem três no ponto $x = 1$ coincidem com os valores correspondentes para a função exponencial $f(x) = e^x$.