Ílinear e geometh lgebra á

Escola T Éngenheiros Navais superiores

Folha 1. Método de Gauss, matriz reversa e determinante

1. Resolva os seguintes sistemas usando o método de eliminação gaussiana.

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +3z & = 3 \\ 2x & +3y & +8z & = 4 \\ 3x & +2y & +17z & = 1, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +5y & +4z & -13t & = 3 \\ 3x & -y & +2z & +5t & = 2 \\ 2x & +2y & +3z & -4t & = 1. \end{array}\right.$$

2. Resolva os seguintes sistemas, dependendo dos diferentes valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$ usando o método de Gauss. No caso em que o sistema possui soluções infinitas, descreva o referido conjunto de soluções.

$$\left\{\begin{array}{lll} ax & +y & = a^2 \\ x & +ay & = 1, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} ax & +y & = a^3 \\ x & +ay & = 1. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} (8-a)x & -6y & +z & = 0 \\ 10x & -(9+a)y & +2z & = 0 \\ 10x & -8y & +(1-a)z & = 0, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} ax & +y & +az & = 2a \\ ax & -ay & +z & = 2a \\ ax & -ay & +az & = 1+a, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +z & = 0 \\ x & +y & +(1+a)z & = 1 \\ x & +y & -a^2z & = a^3. \end{array}\right.$$

3. ECUENTRE Os valores dos parâmetros a, b, c para os quais o sistema a seguir admite exatamente uma solução.Existem valores de a, b, c para os quais o sistema possui soluções infinitas?Justifique sua resposta.

$$\left\{\begin{array}{lll} 2x & +3y & = a \\ x & -2y & = b \\ 3x & +2y & = c. \end{array}\right.$$

4. Resolva o sistema com base em valores $a \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} x & -ay & +a^2z & = a \\ ax & -a^2y & +az & = 1 \\ ax & +y & -a^3z & = 1. \end{cases}$$

5. Determine os valores dos parâmetros para os quais os seguintes sistemas suportam soluções.

$$\begin{cases} ax & +by & +z & = 1 \\ x & +aby & +z & = 1 \\ x & +by & +az & = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -2y & = 1 \\ x & +y & = 2+p \\ 2x & -y & = -1 \\ 3x & -my & = q. \end{cases}$$

6. Encontre as soluções do sistema formadas por uma única equação

$$x_1 + x_2 + ... + x_d = 0.$$

7. Seja A a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Aplicaremos nas fileiras da matriz o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

- O primeiro passo é eliminar a primeira variável de todas as linhas, exceto a primeira.O resultado deve ser uma matriz cuja primeira coluna é formada por Zeros, exceto pela primeira entrada.É solicitado a encontrar uma matriz E_1, de dimensões 4×4, de modo que E_1A seja o mesmo que realizar esse estágio de eliminação gaussiana.
- Da mesma forma, é solicitado a encontrar matrizes E_2 e E_3 para que E_2E_1A e $E_3E_2E_1A$ sejam as matrizes obtidas, respectivamente, do segundo e terceiro estágio da eliminação gaussiana.
- Conclui que A pode ser escrito como um produto LU, onde L é uma matriz triangular mais baixa e U é uma matriz triangular superior.

8. Mostram que, dados cinco pontos do plano $\mathbb{R}^2$, sempre há uma cônica que os contém. Em outras palavras, as coordenadas (x, y) dos cinco pontos satisfazem a mesma equação da forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, onde alguns dos valores $a, ..., f$ são diferentes de zero.

9. É misturado, em condições muito controladas, tolueno C_7H_8 com ácido nítrico HNO_3 para produzir trinitolueno $C_7H_5O_6N_3$ junto com a água.Que proporções devemos misturá -las?É necessariamente verdade que qualquer sistema de equações lineares de um equilíbrio em uma reação química (como a descrita acima) deve ter soluções infinitas?

10. Uma esfera de superfície dourada pesa 7588 gramas no ar.Sabemos que alguns ou vários dos seguintes metais podem conter: alumínio, cobre, ouro ou chumbo.É pesado sucessivamente, em condições normais, em água, benzeno e álcool e os seguintes pesos são obtidos respectivamente: 6588, 6688 e 6778 gramas.

    (a) Descubra, se puder, a quantidade de cada metal que a esfera tem: é ouro puro?O alumínio contém?

    (b) Que peso a esfera terá se mergulharmos em glicerina?

    Indicamos abaixo das densidades relativas das substâncias:

Alumínio	2.7	Álcool	0,81
Cobre	8.9	Benzeno	0,90
Ouro	19.3	Glicerina	1,26
Chumbo (Pb)	11.3	Água	1,00

11. (a) Descreva todas as funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ de modo que $f(1) = 2$ e $f(-1) = 6$.

    (b) Descreva todas as funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ de modo que $f(1) = 2$.

12. Encontre, no caso de haver um polinômio $P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ de grau tanto 3 que tem a propriedade que o valor de $P(x)$ e o de todos os seus derivados para ordenar três no ponto $x = 0$ coincide com os valores correspondentes para a função exponencial $f(x) = e^x$.Em outras palavras, queremos que $P(x)$ cumpra isso:

$$P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ P''(0) = f''(0),\ P'''(0) = f'''(0),\ \text{ser} f(x) = e^x.$$

    Pode haver mais de um polinômio com esta propriedade?Raciocine sua resposta.

13. Repita o exercício anterior para o ponto $x = 1$. Ou seja, encontre, se houver, um polinômio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ de grau no máximo 3 que tem a propriedade de que o valor de $P(x)$ e o de todos os seus derivados para ordenar três no ponto $x = 1$ coincide com os valores correspondentes para a função exponencial $f(x) = e^x$.

14. Vamos $n \geq 2$.Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & = a_1 \\ x_2 & +x_3 & = a_2 \\ & \vdots & \\ x_{n-1} & +x_n & = a_{n-1} \\ x_n & +x_1 & = a_n. \end{cases}$$

Use a resposta obtida para responder à seguinte pergunta: DICE n Points $P_1, P_2, ..., P_n$, existe um polígono de n lados, de modo que os pontos P_j sejam os pontos médios nas laterais do polígono?

15. Em uma ilha, existem 13 camaleões vermelhos, 15 azul e 17 verde.Quando dois camaleões de cores diferentes são encontrados, ambos mudam para a terceira cor.A questão é: pode acontecer que todos os camaleões se afastem da mesma cor?

16. Encontre o inverso da matriz a seguir usando o procedimento visto na aula:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

17. Sabemos que, para as duas matrizes a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tem que $AB = 5\,\mathrm{Id}_4$ (você não precisa verificar). É solicitado a expressar os seguintes sistemas de equações de maneira matriz e resolvê -los através de operações de matrizes:

$$\begin{cases} & -3y & & +2t & = 1 \\ x & +2y & & & = 0 \\ -x & -y & +z & & = 0 \\ x & & & +3t & = 0 \end{cases}, \begin{cases} & -3y & & +2t & = 0 \\ x & +2y & & & = 1 \\ -x & -y & +z & & = 0 \\ x & & & +3t & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad -3y \qquad\qquad +2t & = 2 \\ x \quad +2y & = -1 \\ -x \quad -y \quad +z & = 0 \\ x \qquad\qquad\qquad +3t & = 0 \end{cases},$$

18. Seja A uma matriz 2×2.Obtenha um fórmula para A^{-1} que envolva apenas as entradas de A.

19. Descreva aquelas matrizes A 2×2 que verificam:

$$\text{i)} A = A^{-1}, \qquad \text{ii)} A^t = A^{-1}.$$

20. Seja A uma matriz $d \times d$.¿para Qu válores de d é cumprido $\det A = \det(-A)$?¿e $\det(-A) = -\det A$?

21. Tente a seguinte declaração: Se A é uma matriz $d \times d$ triangular então $\det A$ é igual ao produto dos elementos do diagonal de A.

22. Seja A uma matriz $d \times d$. Mostre que se $\det A \neq 0$ então $A^k \neq 0$ para tudo $k \in \mathbb{N}$.