Matriz inversa

Pablo Angulo, Fabricio Macià

Universidade Pedagogica de Maputo

Definição da matriz inversa

Dada uma matriz A quadrada $d \times d$, dizemos que outras matrizes B quadrado $d \times d$ é **o inverso de** A

$$AB = BA = \mathrm{Id}_d$$

A matriz inversa não sempre existe

Algumas matrizes têm uma matriz inversa, mas outras não.

A matriz reversa de $r\,\mathrm{Id}_d$ é $\frac{1}{r}\,\mathrm{Id}_d$ (para $r \neq 0$).
A matriz O $d \times d$ com todas as entradas iguais a 0 não pode ter matriz reversa, porque $OB = BO = O$.

Quais matrizes têm uma matriz inversa?

- Observamos que a coluna j de AB é $A \cdot \mathbf{b}_j$ (onde b_j é a coluna j-é B).
- Se AB for Id_d, então a coluna j de AB deve ser $\mathbf{e}_j$
- Portanto, para calcular a coluna j de B, temos que resolver o sistema $A \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$
- Em resumo: Para calcular toda a matriz reversa, temos que resolver n Sistemas de equações *com a mesma matriz de coeficientes*.

Quais matrizes têm uma matriz inversa?

- Observamos que a coluna j de AB é $A \cdot \mathbf{b}_j$ (onde b_j é a coluna j-é B).
- Se AB for Id_d, então a coluna j de AB deve ser $\mathbf{e}_j$
- Portanto, para calcular a coluna j de B, temos que resolver o sistema $A \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$
- Em resumo: Para calcular toda a matriz reversa, temos que resolver n Sistemas de equações *com a mesma matriz de coeficientes*.

Seja A uma matriz quadrada $d \times d$.Eles são equivalentes:

1. O sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ possui uma solução única para qualquer vetor de termos independentes $\mathbf{c}$.
2. A matriz A possui uma matriz inversa.

Quais matrizes têm uma matriz inversa?

Seja A uma matriz quadrada $d \times d$.Eles são equivalentes:

1. O sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ possui uma solução única para qualquer vetor de termos independentes $\mathbf{c}$.
2. A matriz A possui uma matriz inversa.

O resultado é facilmente seguido:

- Se o sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiver uma solução única para qualquer vetor de termos independentes $\mathbf{c}$, podemos resolver todos os sistemas $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ que nos dão as colunas de A^{-1}.
- Se A tiver uma matriz inversa, podemos multiplicar $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ pela esquerda pelo inverso de A: $A^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{x} = \mathrm{Id}_d \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$.

  Ou seja, a solução é única e também é $A^{-1} \cdot \mathbf{c}$.

Quais matrizes têm uma matriz inversa?

Seja A uma matriz quadrada $d \times d$.Eles são equivalentes:

1. O sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ possui uma solução única para qualquer vetor de termos independentes $\mathbf{c}$.
2. A matriz A possui uma matriz inversa.

O resultado é facilmente seguido:

- Se o sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiver uma solução única para qualquer vetor de termos independentes $\mathbf{c}$, podemos resolver todos os sistemas $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ que nos dão as colunas de A^{-1}.
- Se A tiver uma matriz inversa, podemos multiplicar $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ pela esquerda pelo inverso de A: $A^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{x} = \mathrm{Id}_d \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$.

  Ou seja, a solução é única e também é $A^{-1} \cdot \mathbf{c}$.

Dizemos que uma matriz que possui uma matriz inversa é **regular** ou **invertível**.
Uma matriz inversa é **singular**.

Cálculo da matriz reversa

Vejamos um método prático para calcular a matriz reversa, com base nas observações anteriores:

- Observamos que a coluna j de AB é $A \cdot \mathbf{b}_j$ (onde b_j é a coluna j-isto é B).
- Se AB for Id_d, então a coluna j de AB deve ser $\mathbf{e}_j$
- Portanto, para calcular a coluna j de B, temos que resolver o sistema $A \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$
- Em resumo: Para calcular toda a matriz reversa, temos que resolver n Sistemas de equações *com a mesma matriz de coeficientes*.

O **método de Gauss**, codificado de maneira matricial, permite a solução de sistemas de equações lineares.
Vamos revisar esta versão do método e depois adaptá -lo ao cálculo da matriz reversa.

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Neste sistema, o vetor de termos independentes foi $\mathbf{e}_1$. Nós mostramos que o sistema

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \quad A|\mathbf{e}_1 = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left\{\begin{array}{rrrl} & & 2z & = 1 \\ x & +y & & = 0 \\ -x & & +z & = 0 \end{array}\right.$$

é equivalente a:

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Neste sistema, o vetor de termos independentes foi $\mathbf{e}_1$. Nós mostramos que o sistema

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \quad A|\mathbf{e}_1 = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left\{\begin{array}{rrrl} & & 2z & = 1 \\ x & +y & & = 0 \\ -x & & +z & = 0 \end{array}\right.$$

é equivalente a:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right], \left\{\begin{array}{rrrl} x & & & = \frac{1}{2} \\ & y & & = -\frac{1}{2} \\ & & z & = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Neste sistema, o vetor de termos independentes foi $\mathbf{e}_1$. Nós mostramos que o sistema

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \quad A|\mathbf{e}_1 = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left\{\begin{array}{llll} & & 2z & = 1 \\ x & +y & & = 0 \\ -x & & +z & = 0 \end{array}\right.$$

é equivalente a:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right], \left\{\begin{array}{llll} x & & & = \frac{1}{2} \\ & y & & = -\frac{1}{2} \\ & & z & = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Então a primeira coluna da matriz inversa $B = A^{-1}$ A deve ser

$$\mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Para encontrar a matriz reversa, lembramos que só precisamos resolver três sistemas de equações:

$$\left\{\begin{array}{llll} & & 2z & =1 \\ x & +y & & =0 \\ -x & & +z & =0 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{llll} & & 2z & =0 \\ x & +y & & =1 \\ -x & & +z & =0 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{llll} & & 2z & =0 \\ x & +y & & =0 \\ -x & & +z & =1 \end{array}\right.$$

que correspondem na notação matricial a:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1, A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_3, A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_3$$

Como eles compartilham a matriz do coeficiente, podemos economizar tempo aumentando A pelos três vetores de coluna da matriz de identidade

$$A|\,\mathrm{Id}_3 = A|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3 = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Vamos ver como podemos resolver os três sistemas com as mesmas fileiras que usamos para resolver um sistema:

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Vamos ver como podemos resolver os três sistemas com as mesmas fileiras que usamos para resolver um sistema:
Vamos permitir que as linhas 1 e 2

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Vamos ver como podemos resolver os três sistemas com as mesmas fileiras que usamos para resolver um sistema:
Vamos permitir que as linhas 1 e 2

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Adicionamos linha 1 à linha 3

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Vamos ver como podemos resolver os três sistemas com as mesmas fileiras que usamos para resolver um sistema:
Vamos permitir que as linhas 1 e 2

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Adicionamos linha 1 à linha 3

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Trocamos a segunda e a terceira fila

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Adicionamos à segunda linha o terceiro multiplicado por -(1/2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Adicionamos à segunda linha o terceiro multiplicado por -(1/2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Adicionamos à linha 1 o segundo multiplicado por -1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Método Gauss para calcular a matriz reversa

Adicionamos à segunda linha o terceiro multiplicado por -(1/2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Adicionamos à linha 1 o segundo multiplicado por -1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dividimos a terceira fila por 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Método Gauss para calcular a matriz reversa

O resultado final:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Consiste na matriz de identidade, aumentada com as colunas do inverso de A:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Este método é econômico e bastante geral.

Quais matrizes têm uma matriz inversa?

Podemos dar outra resposta à pergunta de quais matrizes têm uma matriz inversa.Lembramos que, para A uma matriz quadrada $d \times d$, eles são equivalentes:

1. O sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ possui uma solução única para qualquer vetor de termos independentes $\mathbf{c}$.
2. A matriz A possui uma matriz inversa.

Quais matrizes têm uma matriz inversa?

Podemos dar outra resposta à pergunta de quais matrizes têm uma matriz inversa.Lembramos que, para A uma matriz quadrada $d \times d$, eles são equivalentes:

1. O sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ possui uma solução única para qualquer vetor de termos independentes $\mathbf{c}$.
2. A matriz A possui uma matriz inversa.

Mas se olharmos para o processo para colocar $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ de maneira escalonada, veremos que as operações elementares que devemos seguir não dependem $\mathbf{c}$.

As decisões a serem tomadas no método Gauss (quando escolhemos a equação para o Pivotar) dependem apenas de A

Quais matrizes têm uma matriz inversa?

Podemos dar outra resposta à pergunta de quais matrizes têm uma matriz inversa.Lembramos que, para A uma matriz quadrada $d \times d$, eles são equivalentes:

1. O sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ possui uma solução única para qualquer vetor de termos independentes $\mathbf{c}$.
2. A matriz A possui uma matriz inversa.

Mas se olharmos para o processo para colocar $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ de maneira escalonada, veremos que as operações elementares que devemos seguir não dependem $\mathbf{c}$.

As decisões a serem tomadas no método Gauss (quando escolhemos a equação para o Pivotar) dependem apenas de A Em particular, não depende de $\mathbf{c}$ se atingirmos uma matriz triangular com elementos não nulos na diagonal.

Quais matrizes têm uma matriz inversa?

Podemos dar outra resposta à pergunta de quais matrizes têm uma matriz inversa.Lembramos que, para A uma matriz quadrada $d \times d$, eles são equivalentes:

1. O sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ possui uma solução única para qualquer vetor de termos independentes $\mathbf{c}$.
2. A matriz A possui uma matriz inversa.

Mas se olharmos para o processo para colocar $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ de maneira escalonada, veremos que as operações elementares que devemos seguir não dependem $\mathbf{c}$.

As decisões a serem tomadas no método Gauss (quando escolhemos a equação para o Pivotar) dependem apenas de A Em particular, não depende de $\mathbf{c}$ se atingirmos uma matriz triangular com elementos não nulos na diagonal.

Uma matriz quadrada A $d \times d$ tem inversa se e somente se puder ser transportada por operações elementares para outra matriz triangular com elementos não nulos na diagonal.