Posto de uma matriz

Pablo Angulo, Fabricio Macià

Universidade Pedagogica de Maputo

Posto de uma matriz.Definição

Vamos tomar uma matriz A de dimensões $n \times d$.É chamado **posto** de A o número de linhas de A que são linearmente independentes.
Vamos escrever como Posto A.

Posto de uma matriz.Definição

Vamos tomar uma matriz A de dimensões $n \times d$.É chamado **posto** de A o número de linhas de A que são linearmente independentes.
Vamos escrever como Posto A.
Por exemplo, sim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Então Posto $A = 1$, uma vez que a primeira e a segunda linha de A são proporcionais e, portanto, são linearmente dependentes.

Posto e dimensão (i)

Vamos escrever A (Matrix $n \times d$) em termos de seus vetores de linha:

$$A = \begin{bmatrix} (\mathbf{f}_1)^T \\ \hline (\mathbf{f}_2)^T \\ \hline \vdots \\ \hline (\mathbf{f}_n)^T \end{bmatrix}.$$

Portanto, se S_{filas} é o subespaço de $\mathbb{R}^d$ gerado pelas fileiras de A:

$$S_{\text{filas}} = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n \rangle$$

Segue -se isso

$$\text{Posto}\, A = \dim S_{\text{filas}}.$$

Posto de uma matriz. Como calculá -lo

A maneira mais fácil de calcular o posto de uma matriz é aplicar o método de Gauss.

Cálculo de *Posto*(A)

Se C é a matriz obtida de A Aplicando o *método de Gauss* (lembre-se de que C é sempre uma matriz triangular superior) então:

$$\begin{aligned}\text{Posto}\, A = \text{Posto}\, C &= \text{Número de linhas de } C \text{ diferente de zero} \\ &= \text{Número de variáveis } \textbf{ligadas} \text{ do sistema } C\mathbf{x} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Posto de uma matriz. Como calculá -lo

A razão pela qual Posto A = Posto C é que as operações elementares que usamos no método de Gauss não alteram o posto da matriz resultante. Mais precisamente, o subespaço gerado pelas fileiras da nova matriz é exatamente o mesmo que o subespaço S_{filas} gerado pelas fileiras de A:

1. Se trocarmos entre duas linhas de A, a matriz que os resultados têm o mesmo posto que A.

Posto de uma matriz. Como calculá -lo

A razão pela qual Posto A = Posto C é que as operações elementares que usamos no método de Gauss não alteram o posto da matriz resultante. Mais precisamente, o subespaço gerado pelas fileiras da nova matriz é exatamente o mesmo que o subespaço S_{filas} gerado pelas fileiras de A:

1. Se trocarmos entre duas linhas de A, a matriz que os resultados têm o mesmo posto que A.
2. Se multiplicamos uma linha de A por um número diferente de zero, o subespaço gerado por suas fileiras não muda.

Posto de uma matriz. Como calculá -lo

A razão pela qual Posto A = Posto C é que as operações elementares que usamos no método de Gauss não alteram o posto da matriz resultante. Mais precisamente, o subespaço gerado pelas fileiras da nova matriz é exatamente o mesmo que o subespaço S_{filas} gerado pelas fileiras de A:

1. Se trocarmos entre duas linhas de A, a matriz que os resultados têm o mesmo posto que A.
2. Se multiplicamos uma linha de A por um número diferente de zero, o subespaço gerado por suas fileiras não muda.
3. O mesmo acontece se substituirmos uma linha de A por si só mais uma outra linha diferente dele (verifique!).

classificação e dimensão (ii)

Esse resultado nos permite dar uma segunda interpretação do posto de uma matriz.
Vamos tomar uma matriz A das dimensões $n \times d$ e considerar o subespaço F de $\mathbb{R}^d$ formado por soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

¡Olho!

F Não é o mesmo que o subespaço S_{filas} que usamos antes.

classificação e dimensão (ii)

Esse resultado nos permite dar uma segunda interpretação do posto de uma matriz.

Vamos tomar uma matriz A das dimensões $n \times d$ e considerar o subespaço F de $\mathbb{R}^d$ formado por soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

¡Olho!

F Não é o mesmo que o subespaço S_{filas} que usamos antes.

Cálculo de $dim(F)$ utilizando $Posto(A)$

$$\dim F = \text{Número total de variáveis} - \text{Número de equações lin.independente}$$

classificação e dimensão (ii)

Se, como antes, C for a matriz obtida de A aplicando o método de Gauss, é seguido para que:

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \, : \, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \, : \, C\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

classificação e dimensão (ii)

Se, como antes, C for a matriz obtida de A aplicando o método de Gauss, é seguido para que:

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \ : \ A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \ : \ C\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Então

$$\begin{aligned}\text{Posto}\, A = \text{Posto}\, C &= \text{Nº Variáveis ligadas ao sistema } \ C\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &= d - \text{nº Variáveis livres do sistema } \ C\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &= d - \dim F.\end{aligned}$$

Posto A = Posto A^T

Uma das propriedades mais importantes do posto de uma matriz é que coincide com o número de *colunas* de A que são linearmente independentes.

posto por fileiras = posto por columnas

Se A é uma matriz $n \times d$, então:

$$\begin{aligned} \text{Posto}\, A &= \text{número de linhas de } A \text{ são lin.independente} \\ &= \text{número de colunas de } A \text{ que são lin.independente} \\ &= \text{Posto}\, A^t. \end{aligned}$$

Posto A = Posto A^T.Lá se vai uma demonstração

Vamos tomar o subespaço S_{filas} de $\mathbb{R}^d$ gerado pelas fileiras de A. Sabemos que Posto $A = \dim S_{\text{filas}}$. Além do mais:

$$S_{\text{filas}} = \{\text{todas as combinações lineares de linhas de } A\} = \{\mathbf{x}^T A : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}.$$

Posto A = Posto A^T. Lá se vai uma demonstração

Vamos tomar o subespaço S_{filas} de $\mathbb{R}^d$ gerado pelas fileiras de A. Sabemos que Posto $A = \dim S_{\text{filas}}$. Além do mais:

$S_{\text{filas}} = \{\text{todas as combinações lineares de linhas de } A\} = \{\mathbf{x}^T A : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$.

As soluções do sistema $A A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ são as mesmas que aquelas de $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Claramente, as soluções de $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ também são soluções de $A A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vamos ver que o recíproco é verdadeiro.

Posto A = Posto A^T.Lá se vai uma demonstração

Vamos tomar o subespaço S_{filas} de $\mathbb{R}^d$ gerado pelas fileiras de A. Sabemos que Posto $A = \dim S_{\text{filas}}$. Além do mais:

$S_{\text{filas}} = \{\text{todas as combinações lineares de linhas de } A\} = \{\mathbf{x}^T A : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}.$

As soluções do sistema $A\,A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ são as mesmas que aquelas de $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Claramente, as soluções de $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ também são soluções de $A\,A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$.Vamos ver que o recíproco é verdadeiro.
Se $\mathbf{x}$ verifica que $A\,A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ então:

$$0 = \mathbf{x}^T A\,A^T\mathbf{x} = (A^T\mathbf{x})^T(A^T\mathbf{x}) = ||A^T\mathbf{x}||^2.$$

Isso mostra que $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Posto A = Posto A^T. Existe uma demonstração (cont.)

Portanto, transpondo: $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$ se e somente se $\mathbf{x}^T A A^T = \mathbf{0}$.

Posto A = Posto A^T. Existe uma demonstração (cont.)

Portanto, transpondo: $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$ se e somente se $\mathbf{x}^T A\,A^T = \mathbf{0}$.
Isso significa que as mesmas combinações lineares de linhas de A e $A\,A^T$ dão zero, em particular:

$$\text{Posto}\,A = \text{Posto}(A\,A^T).$$

Posto $A =$ Posto A^T. Existe uma demonstração (cont.)

Portanto, transpondo: $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$ se e somente se $\mathbf{x}^T A\, A^T = \mathbf{0}$.
Isso significa que as mesmas combinações lineares de linhas de A e $A\, A^T$ dão zero, em particular:

$$\text{Posto}\, A = \text{Posto}(A\, A^T).$$

Como as linhas de $A\, A^T$ são combinações lineares das fileiras de A^T (verifique!), Segue-se:

$$\text{Posto}\, A = \text{Posto}(A^T A) \leq \text{Posto}\, A^T.$$

Por enquanto, mostramos que a faixa transposta de uma matriz é maior como a faixa da matriz sem transpor.

Posto $A =$ Posto A^T. Existe uma demonstração (cont.)

Portanto, transpondo: $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$ se e somente se $\mathbf{x}^T A A^T = \mathbf{0}$.
Isso significa que as mesmas combinações lineares de linhas de A e $A A^T$ dão zero, em particular:

$$\text{Posto}\, A = \text{Posto}(A A^T).$$

Como as linhas de $A A^T$ são combinações lineares das fileiras de A^T (verifique!), Segue-se:

$$\text{Posto}\, A = \text{Posto}(A^T A) \leq \text{Posto}\, A^T.$$

Por enquanto, mostramos que a faixa transposta de uma matriz é maior como a faixa da matriz sem transpor.
Se aplicarmos isso a A^T, conseguiremos isso Posto $A^T \leq \text{Posto}(A^T)^T$.

Posto $A =$ Posto A^T. Existe uma demonstração (cont.)

Portanto, transpondo: $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$ se e somente se $\mathbf{x}^T A A^T = \mathbf{0}$.
Isso significa que as mesmas combinações lineares de linhas de A e $A A^T$ dão zero, em particular:

$$\text{Posto}\, A = \text{Posto}(A A^T).$$

Como as linhas de $A A^T$ são combinações lineares das fileiras de A^T (verifique!), Segue-se:

$$\text{Posto}\, A = \text{Posto}(A^T A) \leq \text{Posto}\, A^T.$$

Por enquanto, mostramos que a faixa transposta de uma matriz é maior como a faixa da matriz sem transpor.
Se aplicarmos isso a A^T, conseguiremos isso Posto $A^T \leq \text{Posto}(A^T)^T$.
como $(A^T)^T = A$, mostramos que

$$\text{Posto}\, A^T \leq \text{Posto}\, A,$$

portanto:

$$\text{Posto}\, A = \text{Posto}\, A^T.$$

Posto A = Posto A^T. Existe uma demonstração (cont.)

Portanto, transpondo: $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$ se e somente se $\mathbf{x}^T A\,A^T = \mathbf{0}$.
Isso significa que as mesmas combinações lineares de linhas de A e $A\,A^T$ dão zero, em particular:

$$\text{Posto}\,A = \text{Posto}(A\,A^T).$$

Como as linhas de $A\,A^T$ são combinações lineares das fileiras de A^T (verifique!), Segue-se:

$$\text{Posto}\,A = \text{Posto}(A^T A) \leq \text{Posto}\,A^T.$$

Por enquanto, mostramos que a faixa transposta de uma matriz é maior como a faixa da matriz sem transpor.
Se aplicarmos isso a A^T, conseguiremos isso $\text{Posto}\,A^T \leq \text{Posto}(A^T)^T$.
como $(A^T)^T = A$, mostramos que

$$\text{Posto}\,A^T \leq \text{Posto}\,A,$$

portanto:

$$\text{Posto}\,A = \text{Posto}\,A^T.$$

Q.E.D.

Propriedades do posto

O alcance de uma matriz A

- É igual ao número máximo de linhas linearmente independentes.

Propriedades do posto

O alcance de uma matriz A

- É igual ao número máximo de linhas linearmente independentes.
- É igual ao número máximo de colunas linearmente independentes.

Propriedades do posto

O alcance de uma matriz A

- É igual ao número máximo de linhas linearmente independentes.
- É igual ao número máximo de colunas linearmente independentes.
- é menor ou igual ao número de linhas e que o número de colunas.

Propriedades do posto

O alcance de uma matriz A

- É igual ao número máximo de linhas linearmente independentes.
- É igual ao número máximo de colunas linearmente independentes.
- é menor ou igual ao número de linhas e que o número de colunas.
- é maior ou igual ao posto de qualquer submatriz.

Propriedades do posto

O alcance de uma matriz A

- É igual ao número máximo de linhas linearmente independentes.
- É igual ao número máximo de colunas linearmente independentes.
- é menor ou igual ao número de linhas e que o número de colunas.
- é maior ou igual ao posto de qualquer submatriz.
- Pode ser calculado pelo método de Gauss.

Propriedades do posto

O alcance de uma matriz A

- É igual ao número máximo de linhas linearmente independentes.
- É igual ao número máximo de colunas linearmente independentes.
- é menor ou igual ao número de linhas e que o número de colunas.
- é maior ou igual ao posto de qualquer submatriz.
- Pode ser calculado pelo método de Gauss.
- A faixa de uma matriz triangular é igual ao número de elementos não nulos da diagonal.