Álgebra linear
Universidade Pedagogica de Maputo

Teste 2. 28 de julho de 2025

Sobrenome, nome e numero de identificação:
AVISO: Escreva sua resposta somente neste fólio.

Para que um exercício receba a pontuação, tanto a resposta quanto a abordagem e a justificativa devem estar corretas.

A presença de notas, livros, telefones celulares, calculadoras e outros dispositivos eletrônicos não é permitido.

Parte 1

- Temos uma função definida no intervalo $[0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} rx + a & \text{se } x \in [0,1] \\ sx + b & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$

  em que as constantes a, b, r, s são números reais.

  Encontre todos os possíveis valores para a, b, r, s para os quais a função f é continua e a sua primeira derivada é também continua.

- Qualquer escolha de valores reais para a, b, c, r, s, t determina uma função f:

$$f(x) = \begin{cases} rx + a & \text{se } x \in [0,1) \\ sx + b & \text{se } x \in [1,2) \\ tx + c & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$

  Estamos interessados em todos os possíveis valores para a, b, c, r, s, t tais que:

  - a função f é continua no intervalo $[0,3]$.
  - a sua primeira derivada f' é continua no intervalo $(0,3)$.
  - $f(0) = 0$
  - $f(1) = M$
  - $f(2) = N$

  onde M, N são parâmetros reais.

  Encontre para quais valores de M, N existe uma função f que cumpra as condições anteriores.

Parte 2

- Encontre uma base para a projeção ortogonal M do subespaço $L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$ sobre o subespaço $S = \{x = 0\}$.

- Encontre equações para o subespaço afim F que contém o ponto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e cujo espaço de direções é M.

- Calcule a projeção ortogonal do subespaço $\left\{ \begin{pmatrix} s+t \\ t \\ \cdots \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d, s, t \in \mathbb{R}^d \right\}$ sobre o subespaço $\{x_1 = 0\}$.

Parte 3 Sabemos que as seguintes duas matrizes comutam e que tem o autovalor 1:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

- Encontre uma matriz Q invertível tal que $Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ é uma matriz diagonal, e verifique que $Q^{-1} \cdot B \cdot Q$ é também diagonal.

- Calcule o produto $(A \cdot B)^5 \cdot B \cdot \left(A^{-1} \cdot B^{-1}\right)^5$. Justifique o resultado.