Álgebra linear
Universidade Pedagogica de Maputo

Teste 2. 28 de julho de 2025

Sobrenome, nome e numero de identificação:
AVISO: Escreva sua resposta somente neste fólio.

Para que um exercício receba a pontuação, tanto a resposta quanto a abordagem e a justificativa devem estar corretas.

A presença de notas, livros, telefones celulares, calculadoras e outros dispositivos eletrônicos não é permitido.

Parte 1

- Temos uma função definida no intervalo $[0,2]$

$$f(x)=\begin{cases} r\,x+a & \text{se } x\in[0,1] \\ s\,x+b & \text{se } x\in[1,2] \end{cases}$$

  em que as constantes a,b,r,s são números reais.

  Encontre todos os possíveis valores para a,b,r,s para os quais a função f é continua e a sua primeira derivada é também continua.

- Qualquer escolha de valores reais para a,b,c,r,s,t determina uma função f:

$$f(x)=\begin{cases} r\,x+a & \text{se } x\in[0,1) \\ s\,x+b & \text{se } x\in[1,2) \\ t\,x+c & \text{se } x\in[2,3] \end{cases}$$

  Estamos interessados em todos os possíveis valores para a,b,c,r,s,t tais que:
  - a função f é continua no intervalo $[0,3]$.
  - a sua primeira derivada f' é continua no intervalo $(0,3)$.
  - $f(0)=0$
  - $f(1)=M$
  - $f(2)=N$

  onde M,N são parâmetros reais.

  Encontre para quais valores de M,N existe uma função f que cumpra as condições anteriores. $\begin{pmatrix} b \\ b \\ s \\ s \end{pmatrix}$,

Solução

1. f é continua com derivada continua em $(0,1)$ e em $(1,2)$ para qualqueres valores de r,s,a,b. Apenas prezisamos que f e f' sejam também continuas en $x=1$:

- $\lim_{x\to 1^-} f(x)=r+a=\lim_{x\to 1^+} f(x)=s+b$
- $\lim_{x\to 1^-} f'(x)=r=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=s$

As condições são equivalentes a um sistema de equações homogéneo:

$$\begin{cases} a-b+r-s &= 0 \\ r-s &= 0 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto de soluções é um espaço vetorial.

O sistema já está escalonado, mas é conveniente escrever este outro sistema equivalente e tambem escalonado:

$$\begin{cases} a-b &= 0 \\ r-s &= 0 \end{cases}$$

As variéveis livres são b e s, e as variavéis ligadas a e r:

$$\text{Sols} = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ b \\ s \\ s \end{pmatrix}, b, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. f é continua com derivada continua em $(0,1)$, $(1,2)$ e $(2,3)$ para qualquer valores de r,s,t, a,b,c. Prezisamos que f e f' sejam tambem continuas en $x=1$ e $x=2$, e tambem os valores para $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$ devem ser $0, M, N$:

- $f(0) = a = 0$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = r + a = \lim_{x\to 1^+} f(x) = s + b = M$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2s + b = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2t + c = M$
- $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = r = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = s$
- $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = s = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = t$

As condições são equivalentes a um sistema de equações homogeneo:

$$\begin{cases} a &= 0 \\ a+r &= M \\ s+b &= M \\ 2s+b &= N \\ 2t+c &= N \\ r-s &= 0 \\ s-t &= 0 \end{cases}$$

Por tanto, o conjunto de soluções é um espaço afim (tambem um espaço vetorial se $M=N=0$). O sistema é equivalente a este outro:

$$\begin{cases} a &= 0 \\ r &= M \\ b &= 0 \\ 2s &= N \\ 2t &= N \\ s &= M \\ t &= M \end{cases}$$

Aplicando o método de Gauss, obtemos o sistema escalonado equivalente:

$$\begin{cases} a &= 0 \\ r &= M \\ b &= 0 \\ s &= N/2 \\ t &= N/2 \\ 0 &= M - N/2 \\ 0 &= M - N/2 \end{cases}$$

Este sistema é incompatível salvo se $M = N/2$, em cujo caso é compatível. Esta é a condição buscada: existe uma função f que cumpra as condições anteriores se e sómente se $M = N/2$.

Parte 2

- Encontre uma base para a projeção ortogonal M do subespaço $L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$ sobre o subespaço $S = \{x = 0\}$.

- Encontre equações para o subespaço afim F que contém o ponto $P=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ e cujo espaço de direções é M.

- Calcule a projeção ortogonal do subespaço $\left\{\begin{pmatrix}s+t\\t\\\dots\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^d, s,t\in\mathbb{R}^d\right\}$ sobre o subespaço $\{x_1=0\}$.

1. Definimos $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. A projeção ortogonal M do subespaço L sobre o subespaço S é gerado pelas projeções do vetores v_1 e v_2:

$M=\langle P_S v_1, P_S v_2\rangle$.

Para calcular $P_S v$, usamos:

- $v=P_S v+P_{S^\perp v}$
- $P_{S^\perp v}=\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}w$, para um gerador qualquer w do $S^\perp$ (esta fórmula só é válida porque $S^\perp$ é uma reta vetorial, como veremos)

$S=\{x=0\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=0\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle^\perp$, e por tanto $S^\perp=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ é uma linha vetorial com gerador $w=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. Calculamos

$$P_{S^\perp v_1}=\frac{\langle v_1,w\rangle}{\|w\|^2}w=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, P_{S^\perp v_2}=\frac{\langle v_2,w\rangle}{\|w\|^2}w=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Portanto, $M=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$. M é uma reta vetorial e qualquer vetor não nulo, como $u=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, forma uma base: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

2. $F=P+\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle, \vec{F}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$. Lembramos que se um espaço afim L tem equações $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, o seu subespaço de endereços tem equações $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

As equações para $\vec{F}$ são

$\begin{cases} y &= 0 \\ z &= 0 \\ t &= 0 \end{cases}$

e portanto as equações para F são

$\begin{cases} y &= a \\ z &= b \\ t &= c \end{cases}$

para algums parâmetros reais a, b, c. Mas dado que $P \in F$, segue-se necessariamente que $a = 0$, $b = 0, c = 1$, e portanto as equações para F são

$\begin{cases} y &= 0 \\ z &= 0 \\ t &= 1 \end{cases}$

3. O subespaço $L = \left\{ \begin{pmatrix} s+t \\ t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d, s, t \in \mathbb{R}^d \right\}$ é gerado pelos vetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

A projeção ortogonal M do subespaço L sobre o subespaço S é gerado pelas projeções do vetores v_1 e v_2:

$M = \langle P_S v_1, P_S v_2 \rangle$.

Para calcular $P_S v$, usamos:

- $v = P_S v + P_{S^\perp v}$
- $P_{S^\perp v} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w$, para um gerador qualquer w do $S^\perp$ (esta fórmula só é válida porque $S^\perp$ é uma reta vetorial, como veremos)

$S = \{x = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp$, e por tanto $S^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ é uma linha vetorial com gerador $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculamos

$$P_{S^\perp v_1} = \frac{\langle v_1, w \rangle}{\|w\|^2} w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = v_1, P_{S^\perp v_2} = \frac{\langle v_2, w \rangle}{\|w\|^2} w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. M é uma reta vetorial e qualquer vetor não nulo, como $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, forma uma base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Parte 3 Sabemos que as seguintes duas matrizes comutam e que tem o autovalor 1:

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

- Encontre uma matriz Q invertível tal que $Q^{-1}\cdot A\cdot Q$ é uma matriz diagonal, e verifique que $Q^{-1}\cdot B\cdot Q$ é também diagonal.
- Calcule o produto $(A\cdot B)^5\cdot B\cdot(A^{-1}\cdot B^{-1})^5$. Justifique o resultado.

1. Calculamos $\det(A-\lambda \mathrm{Id})=\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix}$. Desenvolvemos pela segunda fileira:

$\frac{1}{2}-\lambda$

$\det(A-\lambda\mathrm{Id})=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix}=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)^2-\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda+\frac{1}{3}\right)$

Deducimos que uma raiz é $\lambda=\frac{1}{2}$ e as outras duas $\lambda=\frac{\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{4}{3}}}{2}=\frac{\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}}}{2}=\begin{cases} 1 \\ 1/3 \end{cases}$.

Buscamos ous autovetores asociados a cada autovalor:

$\boldsymbol{\lambda=1.}$ $(Ax=\lambda x)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} -x+y+z=0 \\ y=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$. Portanto $S_{\lambda=1}=$

$\langle v_1\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$

$\boldsymbol{\lambda=\frac{1}{3}.}$ $(Ax=\lambda x)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+z=0 \\ y=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$. Portanto $S_{\lambda=\frac{1}{2}}=$

$\langle v_2\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$

$\boldsymbol{\lambda=\frac{1}{2}.}$ $(Ax=\lambda x)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ y=-z \end{cases}$. Portanto

$S_{\lambda=1}=\langle v_3\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$

Uma matriz $Q=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cujas colunas são autovetores de A permite diagonalizar A:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q.$$

Dado que B conmuta com A, $Q^{-1} \cdot B \cdot Q$ será também diagonal, mas a declaração pede que a verifiquemos.

Para verificar que $Q^{-1} B Q$ também é diagonal, é suficente com comprobar que os autovetores de A sejan também autovetores de B:

$$B v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} v_1, B v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2, B v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} v_3.$$

Portanto, já podemos deducir que $Q^{-1} B Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Alternativamente, se quisermos verificar o resultado diretamente, precisamos calcular a inversa da Q pelo método do Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$, e depois calcular $Q^{-1} B Q$ para encontrar o mesmo resultado anterior.

O produto $(A \cdot B)^5 \cdot B \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1})^5$ é fácil de calcular, dado que em este eixemplo, as matrices comutam, e portanto todas as matrices A, A^{-1}, B, B^{-1} comutam:

$$(A \cdot B)^5 \cdot B \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1})^5 = A^5 \cdot B^5 \cdot B \cdot A^{-5} B^{-5} = B$$