Ílinear e geomethr á

T Escola Úpper CNICA de engenheiros navais

Folha 0. Matrizes, vetores e conjuntos

1. Como visto em classe, o subconjunto formado pelos números naturais pode ser escrito como:

$$\{2n \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Da mesma forma, escreva o seguinte subconjunto:

(a) O subconjunto dos números naturais que são múltiplos de cinco.

(b) Os pontos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas se encontram $x - y = 3$.

(c) Os pontos da linha plana $\mathbb{R}^2$ com pendente igual a dois e que passam pelo ponto de coordenada $(1, 1)$.

(d) Os pontos do avião em $\mathbb{R}^3$ que passam pela origem e pelos pontos de coordenadas $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$.

(e) Os pontos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ cujas coordenadas se reúnem $x + y + z = 0$.

(f) Os pontos da linha espacial $\mathbb{R}^3$ que passam pela origem e ponto $(1, 1, 1)$.

(g) Os pontos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ cujas coordenadas são soluções do sistema $x+y+z = 0 = x - y - 1$.

(h) Os pontos de $\mathbb{R}^3$ que estão na interseção do plano que passa por $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ com o plano paralelo ao plano Oxy e que passa por $(0, 0, 1)$.

(i) Os pontos de $\mathbb{R}^2$ que estão na união da linha de inclinação um que passa pela origem com a linha de inclinação -1 que também passa pela origem.

2. O mesmo conjunto pode ser descrito de várias maneiras, alguns mais elaborados que outros. Por exemplo, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \text{existe um número} y \in \mathbb{R} \text{tal que} x = y^2\}$$

Também pode ser descrito como “ o conjunto de números reais positivos ” ou também como 'o intervalo $[0, \infty)$' '.

Descreva os seguintes conjuntos de uma maneira mais simples (ou pelo menos de uma maneira diferente):

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \text{existe um número} y \in \mathbb{R} \text{tal que} x = e^y\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \text{existe um número} y \in \mathbb{R} \text{tal que} x = \cos(y)\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{N} \,:\, \text{existem dois números} y, z \in \mathbb{R} \text{tal que} x = y + z\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{N} \,:\, \text{existem dois números} y, z \in [0, \infty) \text{tal que} x = y + z\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{N} \,:\, \text{existem dois números} y \in \mathbb{R}, z \in [0, \infty) \text{tal que} x = y + z\}$

(f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \,:\, \text{existem dois números} z, t \in \mathbb{R} \text{tal que} x = e^t, y/x = e^z\}$

(g) $G = \{x \in \mathbb{N} \,:\, \text{Existem dois números ímpares} y, z \text{tal que} x = y + z\}$

(h) $H = \{x \in \mathbb{N} \,:\, \text{existem dois números uniformes} y, z \text{tal que} x = y + z\}$

(i) $I = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \text{existe um número} y \in \mathbb{N} \text{tal que} x = y^2\}$

(j) $J = \{x \in \mathbb{N} \,:\, \text{existe um número} y \in \mathbb{N} \text{tal que} x = y^2\}$

Identifique quais conjuntos da lista anterior são os mesmos.

3. Para quais desses casos os conjuntos A e B são os mesmos?Caso não seja, especifique em quais elementos diferem.De qualquer forma, justifique a resposta.

(a) $A = \{\sqrt{x} \,:\, x \in \mathbb{R},\, x > 0\}, \quad B = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y > 0\}$.

(b) $A = \{\sqrt{|x|} \,:\, x \in \mathbb{R}\}, \quad B = \mathbb{R}$.

(c) $A = \{(|x|, x^2) \,:\, x \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{|y| \,:\, y \in \mathbb{R}\}$.

(d) $A = \{\sin(x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{y \in \mathbb{R} \,:\, -1 \leq y \leq 1\}$.

(e) $A = [0, \infty)^2, \quad B = \{(x, y) \,:\, x \in \mathbb{R},\, y > 0\}$.

(f) $A = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R},\, x - y = 0\}, \quad B = \{(b, b) \,:\, b \in \mathbb{R}\}$.

(g) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 0\}, \quad B = \{(0, 0)\}$.

(h) $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq 0\}, \quad B = \{0\}$.

(i) $A = \{(x, 3) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{Q}^2, \quad B = \{(x, 3) \,:\, x \in \mathbb{Q}\}$.

4. Uma matriz quadrada A é *triangular superior* se todas as entradas da matriz que estão abaixo da diagonal forem zero.Analiticamente, essa condição é expressa dizendo que $a_{ij} = 0$ se $i > j$.Da mesma forma, diz-se que uma matriz quadrada A é *triangular inferior* se A^T for triangular superior.

Vamos A e B duas matrizes $d \times d$.Mostre que se A e B são ambos Matrizes triangulares superiores (ou ambas triangulares inferiores) então AB também é isso.

5. Uma matriz A é uma matriz *Antisimétrica* se atender:

$$A = -A^T.$$

mostram que os elementos dos elementos dos elementos do A diagonal de uma matriz antisimétrica é toda igual a zero ..

6. Vamos
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
É solicitado a demonstrar que a matriz quadrada B dois por dois que se encontram
$$AB = BA$$
são precisamente aqueles que podem ser escritos como
$$B = \alpha A + \beta \mathrm{Id},$$
onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e Id é a matriz de identidade.

7. Encontre todas as matrizes $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ que verificam $AB = BA$, sendo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Consideramos a seguinte matriz:
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   - Calcule B^2 e B^3.Calcule B^n para $n \geq 3$.
   - Vamos $A = \mathrm{id}+b$, onde Id é a matriz de identidade.Raciocínio para a recorrência, mostre que, para qualquer número inteiro $n > 0$, você tem:
$$A^n = \mathrm{id} + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2.$$

9. Calcule A^k, com $k \in \mathbb{N}$, sendo:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. mostram que se A é uma matriz $n \times m$ e B é uma matriz $m \times d$, é cumprida que:
$$(AB)^T = B^T A^T.$$

11. O traço $\mathrm{Tr}\, A$ de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos de sua diagonal.Verifique se A e B forem matrizes $d \times d$, então é cumprido:
$$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA).$$