O Método de Gauss

Eliminação de Gauss

Pablo Angulo, Fabricio Macià

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales
Universidad Politécnica de Madrid

Sistemas de equações lineares

Um exemplo:

$$\begin{cases} & & 2z & +w & = 5 \\ 2x & -2y & +z & +2w & = 4 \\ & y & & +w & = 0 \\ x & -y & & & = 0, \end{cases}$$

- Aqui, x, y, z, w são **variáveis** ou **incógnita**.
- Os números que multiplicam as variáveis são os **coeficientes** do sistema.
- Os números que não estão multiplicando as variáveis são **Termos independentes**.Neste exemplo, estão os números próximos à direita nas igualdades.
- a **Solução** do sistema são valores numéricos específicos para as variáveis x, y, z, w para as quais todas as equações do sistema simultaneamente são atendidas para as variáveis.

O que significa resolver um sistema?

Resolver un sistema

Solução de um sistema significa encontrar todas as suas soluções, ou falhando nisso, mostre que o sistema não possui soluções.

Exemplo 1. O sistema:

$$\begin{cases} x & +y & = 1, \\ x & -y & = 0, \end{cases}$$

Ele tem apenas uma solução $x = 1/2, \; y = 1/2.$

O que significa resolver um sistema?

Resolver un sistema

Solução de um sistema significa encontrar todas as suas soluções, ou falhando nisso, mostre que o sistema não possui soluções.

Exemplo 2. O sistema:

$$\begin{cases} x & +y & = 1, \\ 2x & +2y & = 2, \end{cases}$$

Tem inúmeras soluções.Qualquer par de valores (x, y) que se reúnem $x = 1 - y$ são soluções.

O que significa resolver um sistema?

Resolver un sistema

Solução de um sistema significa encontrar todas as suas soluções, ou falhando nisso, mostre que o sistema não possui soluções.

Exemplo 3. O sistema:

$$\begin{cases} x & +y & = 1, \\ x & +y & = 2, \end{cases}$$

Não tem solução.As duas equações impõem requisitos contraditórios à soma de x E y.

Sistemas equivalentes

Definición

Diremos que dois sistemas de equações lineares são **equivalente** se os dois sistemas tiverem exatamente as mesmas soluções.

Sistemas equivalentes

Definición

Diremos que dois sistemas de equações lineares são **equivalente** se os dois sistemas tiverem exatamente as mesmas soluções.

- está implícito na definição de que, para dois sistemas equivalentes, eles precisam ter o mesmo número de incógnitas.

Sistemas equivalentes

Definición

Diremos que dois sistemas de equações lineares são **equivalente** se os dois sistemas tiverem exatamente as mesmas soluções.

- está implícito na definição de que, para dois sistemas equivalentes, eles precisam ter o mesmo número de incógnitas.
- Se dois sistemas forem equivalentes e um deles não possui soluções, o mesmo vale para o outro.

Três regras para obter um sistema equivalente de outro

Método fundamental

Se alguma das três regras após um sistema de equações lineares for aplicada um sistema equivalente.

1. **Trocar a ordem das linhas** Trocamos duas equações entre si. Esse processo altera apenas a ordem das equações.

Três regras para obter um sistema equivalente de outro

Método fundamental

Se alguma das três regras após um sistema de equações lineares for aplicada um sistema equivalente.

1. **Trocar a ordem das linhas** Trocamos duas equações entre si. Esse processo altera apenas a ordem das equações.
2. **Reescalado de linhas:** multiplicamos os dois lados de uma equação por uma constante *diferente de zero*.

Três regras para obter um sistema equivalente de outro

Método fundamental

Se alguma das três regras após um sistema de equações lineares for aplicada um sistema equivalente.

1. **Trocar a ordem das linhas** Trocamos duas equações entre si. Esse processo altera apenas a ordem das equações.
2. **Reescalado de linhas:** multiplicamos os dois lados de uma equação por uma constante *diferente de zero*.
3. **Combinação de linhas:** Uma equação é substituída pela soma de si mesma e um múltiplo de outra equação *diferente de ele* do sistema.

O método Gauss

Método Gauss ou **Método de eliminação gaussiano** é um procedimento que, aplicado a um sistema de equações lineares, permite obter um sistema equivalente mais simples, que pode ser resolvido com limpando incógnitas.

O método consiste em aplicar as três regras anteriores após um padrão estabelecido que descrevemos abaixo por meio de um exemplo.

O método Gauss em ação

$$\begin{cases} & & 2z & +w & = 5 \\ 2x & -2y & +z & +2w & = 4 \\ & y & & +w & = 0 \\ x & -y & & & = 0, \end{cases}$$

Vamos aplicar o método Gauss para resolver este sistema.

Paso 0

Paso 0 consiste na escolha de uma ordem nas variáveis ou incógnitas.Vamos pedir as incógnitas como esta:

$$x, y, z, w$$

Embora pudéssemos ter escolhido qualquer outra ordem.

O método Gauss em ação

$$\begin{cases} & & 2z & +w & = 5 \\ 2x & -2y & +z & +2w & = 4 \\ & y & & +w & = 0 \\ x & -y & & & = 0, \end{cases}$$

Paso 1

Pedimos as equações para que, na equação, colocamos em primeiro lugar a primeira variável apareça.

O método Gauss em ação

$$\begin{cases} x & -y & & & = 0 \\ 2x & -2y & +z & +2w & = 4 \\ & & 2z & +w & = 5 \\ & y & & +w & = 0. \end{cases}$$

Paso 1

Pedimos as equações para que, na equação, colocamos em primeiro lugar que a primeira variável apareça.

Uma vez que isso não modificaremos mais a primeira equação.

O método Gauss em ação

$$\begin{cases} x & -y & & & = 0 \\ 2x & -2y & +z & +2w & = 4 \\ & & 2z & +w & = 5 \\ & y & & +w & = 0. \end{cases}$$

Paso 1 (cont.)

Agora eliminamos a primeira variável (x neste caso) de todas as equações exceto a primeira, aplicando a regra 3.

O método Gauss em ação

$$\begin{cases} x \quad -y \qquad\qquad\qquad = 0 \\ \qquad\qquad z \quad +2w \quad = 4 \\ \qquad\qquad 2z \quad +w \quad = 5 \\ \qquad y \qquad\quad +w \quad = 0. \end{cases}$$

Paso 1 (cont.)

Agora eliminamos a primeira variável (x neste caso) de todas as equações exceto a primeira, aplicando a regra 3.
Para fazer isso, substituímos a segunda equação pela segunda equação menos duas vezes a primeira.
Não é necessário fazer nada com a terceira e quarta equação, pois nelas a variável x não aparece.

O método Gauss em ação

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & -y & & & = 0 \\ & & z & +2w & = 4 \\ & & 2z & +w & = 5 \\ & y & & +w & = 0. \end{array}\right.$$

Paso 2

Como dissemos antes, não tocamos mais a primeira equação.
Passamos para ordenar as equações do segundo ao último, para que, na equação, colocamos em segundo lugar que a segunda variável apareça.

O método Gauss em ação

$$\begin{cases} x & -y & & & = 0 \\ & y & & +w & = 0 \\ & & z & +2w & = 4 \\ & & 2z & +w & = 5. \end{cases}$$

Paso 2

Passamos para ordenar as equações do segundo ao último, para que, na equação, colocamos em segundo lugar que a segunda variável apareça. Se a segunda variável não aparecesse em nenhuma das equações da segunda para a última, pularíamos esta etapa e iríamos diretamente para a etapa 3.

O método Gauss em ação

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5. \end{cases}$$

Paso 2 (cont.)

A partir deste ponto, não tocamos mais a primeira ou a segunda equação novamente.Em seguida, eliminamos a segunda variável das terceiras equações em diante aplicando a regra 3 como antes.
Como a variável y não aparece em nenhuma dessas equações, não fazemos nada.

O método Gauss em ação

$$\begin{cases} x & -y & & & = 0 \\ & y & & +w & = 0 \\ & & z & +2w & = 4 \\ & & 2z & +w & = 5. \end{cases}$$

Paso 3

Passamos para ordenar as equações do terceiro ao último, para que, na equação que colocamos em terceiro lugar, a segunda variável apareça. Como é esse o caso, deixamos o sistema como ele é.

O método Gauss em ação

$$\begin{cases} x & -y & & & = 0 \\ & y & & +w & = 0 \\ & & z & +2w & = 4 \\ & & 2z & +w & = 5. \end{cases}$$

Paso 3 (cont.)

A partir deste ponto, não tocamos mais as equações de um a três. Em seguida, eliminamos a terceira variável, z neste caso, das quartas equações em diante aplicando a regra 3 como antes.

O método Gauss em ação

$$\begin{cases} x & -y & & & = 0 \\ & y & & +w & = 0 \\ & & z & +2w & = 4 \\ & & & -3w & = -3. \end{cases}$$

Paso 3 (cont.)

Em seguida, eliminamos a terceira variável, z neste caso, das quartas equações em diante aplicando a regra 3 como antes.
Para eliminar z da última equação, subtraímos a terceira duas vezes.

o método Gauss em ação

Tendo usado apenas as três regras para passar de uma, os sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} & & 2z & +w & = 5 \\ 2x & -2y & +z & +2w & = 4 \\ & y & & +w & = 0 \\ x & -y & & & = 0, \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} x & -y & & & = 0 \\ & y & & +w & = 0 \\ & & z & +2w & = 4 \\ & & & -3w & = -3. \end{array}\right.$$

Eles são **equivalentes**, ou seja, eles têm exatamente as mesmas soluções.

Tendo usado apenas as três regras para passar de uma, os sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} & & 2z & +w & = 5 \\ 2x & -2y & +z & +2w & = 4 \\ & y & & +w & = 0 \\ x & -y & & & = 0, \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} x & -y & & & = 0 \\ & y & & +w & = 0 \\ & & z & +2w & = 4 \\ & & & -3w & = -3. \end{array}\right.$$

Eles são **equivalentes**, ou seja, eles têm exatamente as mesmas soluções.

Mas o segundo sistema é muito fácil de resolver, pois é um **Sistema Escalonado**.

O método Gauss em ação

Para resolver

$$\begin{cases} x & -y & & & = 0 \\ & y & & +w & = 0 \\ & & z & +2w & = 4 \\ & & & -3w & = -3. \end{cases}$$

É suficiente resolver as equações que começam com a última, continuando para o penúltimo e assim por diante até chegar ao primeiro.

O método Gauss em ação

Para resolver

$$\begin{cases} x & -y & & & = 0 \\ & y & & +w & = 0 \\ & & z & +2w & = 4 \\ & & & -3w & = -3. \end{cases}$$

É suficiente resolver as equações que começam com a última, continuando para o penúltimo e assim por diante até chegar ao primeiro.

Fazendo isso, entendemos que a única solução do sistema é:

$$w = 1, \quad z = 2, \quad y = -1, \quad x = -1.$$

versão matricial do método Gauss

Para resolver o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1d}x_d = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \dots & +a_{2d}x_d = & b_2 \\ & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & \dots & +a_{nd}x_d = & b_n, \end{cases}$$

Começamos definindo a **matrize de Coeficientes** A, o **vetor de incógnitas** $\mathbf{x}$ e o **vetor de termos independentes** $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nd} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

para que o sistema seja escrito $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Subseção: estenda uma matriz

Se tivermos duas matrizes A e B com o mesmo número de linhas:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_d \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_m \end{array}\right]$$

Podemos **estender** a matriz A com a matriz B:

$$A|B = \left[\begin{array}{c|c|c|c||c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_d & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_m \end{array}\right]$$

Versão matricial do método Gauss

O próximo passo é definir o **matriz aumentada**:

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nd} & b_n \end{array}\right]$$

Versão matricial do método Gauss

O próximo passo é definir o **matriz aumentada**:

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nd} & b_n \end{array}\right]$$

e depois executar *Operações Elementares* nas fileiras de A:

- Troca da posição duas linhas
- Multiplique uma linha por um número diferente de zero
- Adicione a uma linha um múltiplo de outra linha

com o objetivo de alcançar um **matriz escalonada**.

Versão matricial do método Gauss

O próximo passo é definir o **matriz aumentada**:

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nd} & b_n \end{array}\right]$$

e depois executar *Operações Elementares* nas fileiras de A:

- Troca da posição duas linhas
- Multiplique uma linha por um número diferente de zero
- Adicione a uma linha um múltiplo de outra linha

com o objetivo de alcançar um **matriz escalonada**. Depois de obter uma matriz escalonada, se o sistema tiver uma solução única, é fácil continuar realizando operações elementares até que a submatriz da esquerda seja a identidade ...

Versão matricial do método Gauss

O próximo passo é definir o **matriz aumentada**:

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nd} & b_n \end{array}\right]$$

e depois executar *Operações Elementares* nas fileiras de A:

- Troca da posição duas linhas
- Multiplique uma linha por um número diferente de zero
- Adicione a uma linha um múltiplo de outra linha

com o objetivo de alcançar um **matriz escalonada**. Depois de obter uma matriz escalonada, se o sistema tiver uma solução única, é fácil continuar realizando operações elementares até que a submatriz da esquerda seja a identidade ...

vamos olhar para um exemplo!

Método Gauss na versão Matrix

Para o sistema de ecuações

$$\begin{cases} & & 2z & = 1 \\ x & +y & & = 0 \\ -x & & +z & = 0 \end{cases}$$

o matriz aumentada es:

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Método Gauss na versão Matrix

Para o sistema de ecuações

$$\begin{cases} & & 2z & = 1 \\ x & +y & & = 0 \\ -x & & +z & = 0 \end{cases}$$

o matriz aumentada es:

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Permutamos as fileiras 1 e 2

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Método Gauss na versão Matrix

Adicionamos linha 1 à linha 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Método Gauss na versão Matrix

Adicionamos linha 1 à linha 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Trocamos a segunda e a terceira fila

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Já temos o sistema de forma escalonada e verificamos que o sistema possui uma única solução, pois os coeficientes diagonais são diferentes de zero.

Método Gauss na versão Matrix

Adicionamos linha 1 à linha 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Trocamos a segunda e a terceira fila

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Já temos o sistema de forma escalonada e verificamos que o sistema possui uma única solução, pois os coeficientes diagonais são diferentes de zero. Nosso objetivo é agora *"limpar o valor de cada variável"*, atingindo equações do tipo: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ que envolvem uma única variável com coeficiente 1.

Método Gauss na versão Matrix

Adicionamos à segunda linha o terceiro multiplicado por -(1/2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Método Gauss na versão Matrix

Adicionamos à segunda linha o terceiro multiplicado por -(1/2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Adicionamos à linha 1 o segundo multiplicado por -1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Método Gauss na versão Matrix

Adicionamos à segunda linha o terceiro multiplicado por -(1/2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Adicionamos à linha 1 o segundo multiplicado por -1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Dividimos a terceira fila por 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Escola de equações lineares escalonadas

Um sistema de equações tem várias incógnitas (x, y, z, w, t) e várias equações:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & -y & & -w & & = 0 \\ & & 2z & & +2t & = 0 \\ & & & -3w & -t & = -3. \end{array}\right.$$

Vamos estudar os sistemas escalonados por dois motivos:

1. O método Gauss permite um sistema de equações escalonadas com as mesmas soluções que qualquer sistema de equações lineares.
2. É especialmente fácil obter as soluções de um sistema de equações escalonadas.

Definição de sistema escalonado

Pivô

Para começar, é necessário *Ordenar as variáveis.*No exemplo anterior, podemos usar a ordem é x, y, z, w, t. Em seguida, definimos o **pivô** de uma equação como a primeira variável, na ordem que escolhemos, que aparece na equação com um coeficiente diferente de zero.

Sistema escalonado

Um sistema de equações é **escalonado** se o pivô da primeira equação for uma variável anterior o pivô da segunda equação, o pivô da segunda equação é anterior ao pivô do terceiro e assim por diante.

Variáveis livres e ligadas

$$\begin{cases} x \quad -y \qquad\qquad -w \qquad\qquad = 0 \\ \qquad\qquad 2z \quad -2w \quad +2t \quad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad -3w \quad -t \quad = -3. \end{cases}$$

Variáveis livres

As variáveis que *não* são pivô de qualquer equação são **livres** .
Variáveis gratuitas podem levar qualquer combinação de valores reais.

Variáveis ligadas

As variáveis que *sim* são pivô de uma equação são **Ligadas** .
Seu valor é determinado quando conhecemos os valores de todas as variáveis livres.

Variáveis livres e ligadas

$$\begin{cases} x & -y & & -w & & = 0 \\ & & 2z & -2w & +2t & = 0 \\ & & & -3w & -t & = -3. \end{cases}$$

Variáveis livres

As variáveis que *não* são pivô de qualquer equação são **livres** (y, t). Variáveis gratuitas podem levar qualquer combinação de valores reais.

Variáveis ligadas

As variáveis que *sim* são pivô de uma equação são **Ligadas** (x, z, w). Seu valor é determinado quando conhecemos os valores de todas as variáveis livres.