Subespaços vetoriais

Pablo Angulo, Fabricio Macià

Universidade Pedagogica de Maputo

soluções de um sistema de equações homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares homogêneas*, as soluções têm a mesma forma:

soluções de um sistema de equações homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares homogêneas*, as soluções têm a mesma forma:

$$\begin{cases} x & -2y & & = 0 \\ & y & -z & = 0. \end{cases}$$

soluções de um sistema de equações homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares homogêneas*, as soluções têm a mesma forma:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & -2y & & = 0 \\ & y & -z & = 0. \end{array} \right. \qquad \{(2z, z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

soluções de um sistema de equações homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares homogêneas*, as soluções têm a mesma forma:

$$\begin{cases} x & -2y & & = 0 \\ & y & -z & = 0. \end{cases} \qquad \{(2z, z, z), z \in \mathbb{R}\} \qquad \left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

soluções de um sistema de equações homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares homogêneas*, as soluções têm a mesma forma:

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & -2y & & = 0 \\ & y & -z & = 0. \end{array}\right. \qquad \{(2z, z, z), z \in \mathbb{R}\} \qquad \left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & -2y & = 0 \end{array} \right.$$

soluções de um sistema de equações homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares homogêneas*, as soluções têm a mesma forma:

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & -2y & & = 0 \\ & y & -z & = 0. \end{array}\right. \qquad \{(2z, z, z), z \in \mathbb{R}\} \qquad \left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & -2y & = 0 \end{array}\right. \quad \{(2y, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$$

soluções de um sistema de equações homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares homogêneas*, as soluções têm a mesma forma:

$$\begin{cases} x & -2y & & = 0 \\ & y & -z & = 0. \end{cases} \qquad \{(2z, z, z), z \in \mathbb{R}\} \qquad \left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\{\ x \quad -2y \quad = 0 \qquad \{(2y, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} \qquad \left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

soluções de um sistema de equações homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares homogêneas*, as soluções têm a mesma forma:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & & = 0 \\ & y & -z & = 0. \end{array}\right. \qquad \{(2z, z, z), z \in \mathbb{R}\} \qquad \left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rrl} x & -2y & = 0 \end{array}\right. \quad \{(2y, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} \quad \left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Lembre-se de que as três descrições definem o mesmo conjunto, de uma maneira **implícita**, **paramétrica** e **vetorial**.

subespaço vetor

Isso motiva a seguinte definição:

Subespaço vetorial

Um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ é um **subespaço vetorial** se puder ser expresso no formulário:

$$S = \{z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \; z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

Para certos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ que são chamados de **conjunto de geradores** de S.

subespaço vetor

Isso motiva a seguinte definição:

Subespaço vetorial

Um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ é um **subespaço vetorial** se puder ser expresso no formulário:

$$S = \{z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \; z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

Para certos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ que são chamados de **conjunto de geradores** de S.

Também aceitamos como espaço vetorial *"o subespaço* 0" cujo único elemento é o **vetor zero** $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (porque também pode ser o conjunto de soluções de um sistema de equações)

Exemplos

Por exemplo, o conjunto de soluções de:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & -2y & & = 0 \\ & y & -z & = 0. \end{array} \right. \qquad \{(2z, z, z), z \in \mathbb{R}\} \qquad \left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplos

Por exemplo, o conjunto de soluções de:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & -2y & & = 0 \\ & y & -z & = 0. \end{array} \right. \qquad \{(2z, z, z), z \in \mathbb{R}\} \qquad \left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

É um subespaço vetorial *gerado por* $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Exemplos

O conjunto de soluções de:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & -2y & = 0 \end{array} \right. \quad \{(2y, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} \quad \left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplos

O conjunto de soluções de:

$$\{\ x \quad -2y \quad = 0 \qquad \{(2y, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} \quad \left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

É um subespaço vetorial *gerado por* $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exemplos

O conjunto de soluções de:

$$\{\ x \quad -2y \quad = 0 \quad \{(2y, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} \quad \left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

É um subespaço vetorial *gerado por* $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Já demonstramos, usando o método Gauss, que o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares homogêneas é sempre um subespaço vetorial.

subespaços vetoriais $\mathbb{R}^2$

Exemplos de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$:

subespaços vetoriais $\mathbb{R}^2$

Exemplos de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$:

- **subespaço trivial**, formado pelo vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

subespaços vetoriais $\mathbb{R}^2$

Exemplos de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$:

- **subespaço trivial**, formado pelo vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- **subespaço total**, formado por todos os vetores de $\mathbb{R}^2$. Um possível conjunto de geradores de $S = \mathbb{R}^2$ é $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

subespaços vetoriais $\mathbb{R}^2$

Exemplos de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$:

- **subespaço trivial**, formado pelo vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- **subespaço total**, formado por todos os vetores de $\mathbb{R}^2$. Um possível conjunto de geradores de $S = \mathbb{R}^2$ é $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- A **reta vetorial**, formado por todos os múltiplos $\lambda\mathbf{v}$ de um vetor $\mathbf{v}$ que não é o vetor zero.

subespaços vetoriais $\mathbb{R}^3$

Exemplos de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

subespaços vetoriais $\mathbb{R}^3$

Exemplos de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

- **subespaço trivial**, formado pelo vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

subespaços vetoriais $\mathbb{R}^3$

Exemplos de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

- **subespaço trivial**, formado pelo vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- **subespaço total**, formado por todos os vetores de $\mathbb{R}^3$. Um possível conjunto de geradores de $S = \mathbb{R}^3$ é
  $$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

subespaços vetoriais $\mathbb{R}^3$

Exemplos de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

- **subespaço trivial**, formado pelo vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- **subespaço total**, formado por todos os vetores de $\mathbb{R}^3$. Um possível conjunto de geradores de $S = \mathbb{R}^3$ é
$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
- A **reta vetorial**, formado por todos os múltiplos de um vetor $\mathbf{v}_1$ que não é o vetor zero.

subespaços vetoriais $\mathbb{R}^3$

Exemplos de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

- **subespaço trivial**, formado pelo vetor de coordenadas $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- **subespaço total**, formado por todos os vetores de $\mathbb{R}^3$. Um possível conjunto de geradores de $S = \mathbb{R}^3$ é
$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
- A **reta vetorial**, formado por todos os múltiplos de um vetor $\mathbf{v}_1$ que não é o vetor zero.
- O **plano vetorial**, formado por todos os vetores que podem ser escritos na forma $z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + z_2 \cdot \mathbf{v}_2$, onde $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são dois vetores que não são um múltiplo do outro.

O conjunto de geradores não é exclusivo

Os exemplos anteriores já sugerem que *o mesmo subespaço pode ter mais de um conjunto de geradores*.

O conjunto de geradores não é exclusivo

Os exemplos anteriores já sugerem que *o mesmo subespaço pode ter mais de um conjunto de geradores*.

$$\left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

O conjunto de geradores não é exclusivo

Os exemplos anteriores já sugerem que *o mesmo subespaço pode ter mais de um conjunto de geradores*.

$$\left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

O conjunto de geradores não é exclusivo

Os exemplos anteriores já sugerem que *o mesmo subespaço pode ter mais de um conjunto de geradores*.

$$\left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ d \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

o número de vetores de um conjunto de geradores

Pode até acontecer que dois conjuntos de geradores *do mesmo subespaço vetorial* tenham *número diferente de elementos*:

o número de vetores de um conjunto de geradores

Pode até acontecer que dois conjuntos de geradores *do mesmo subespaço vetorial* tenham *número diferente de elementos*:

$$\left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

o número de vetores de um conjunto de geradores

Pode até acontecer que dois conjuntos de geradores *do mesmo subespaço vetorial* tenham *número diferente de elementos*:

$$\left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$\left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

combinações lineares

Vamos introduzir uma definição fundamental:

Combinação linear

Dizemos que um vetor $\mathbf{v}$ é uma combinação linear de $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ se houver m números reais $t_1, \dots t_m$ de tal maneira que

$$\mathbf{v} = t_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + t_m \cdot \mathbf{w}_m$$

combinações lineares

Vamos introduzir uma definição fundamental:

Combinação linear

Dizemos que um vetor $\mathbf{v}$ é uma combinação linear de $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ se houver m números reais $t_1, \ldots t_m$ de tal maneira que

$$\mathbf{v} = t_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + t_m \cdot \mathbf{w}_m$$

Subespaço engendrado por k vectores

O **subespaço gerado** por $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é o subespaço vetorial formado por todas as combinações lineares são esses vetores:

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = \{z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \ z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

Vectores linealmente dependientes

Dizemos que m vetores $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ são **linearamente dependentes** Se houver m números reais $t_1, \ldots t_m$ *nem todos nulos* de tal maneira que

$$t_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + t_m \cdot \mathbf{w}_m = \mathbf{0}$$

dependência e independência linear

Vectores linealmente dependientes

Dizemos que m vetores $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ são **linearamente dependentes** Se houver m números reais $t_1, \ldots t_m$ *nem todos nulos* de tal maneira que

$$t_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + t_m \cdot \mathbf{w}_m = \mathbf{0}$$

Dizemos que m vetores são **linearmente independentes** se não forem linearmente dependentes.

dependência e independência linear

Vectores linealmente dependientes

Dizemos que m vetores $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ são **linearamente dependentes** Se houver m números reais $t_1, \ldots t_m$ *nem todos nulos* de tal maneira que

$$t_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + t_m \cdot \mathbf{w}_m = \mathbf{0}$$

Dizemos que m vetores são **linearmente independentes** se não forem linearmente dependentes.

É claro que, se, para um conjunto de geradores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, adicionamos uma combinação linear dos vetores de conjunto, o subespaço gerado for o mesmo:

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = \left\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \sum_{j=1}^{k} a_j v_j \right\rangle$$

Vectores linealmente dependentes

Dizemos que m vetores $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ são **linearamente dependentes** Se houver m números reais $t_1, \ldots t_m$ *nem todos nulos* de tal maneira que

$$t_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + t_m \cdot \mathbf{w}_m = \mathbf{0}$$

Dizemos que m vetores são **linearmente independentes** se não forem linearmente dependentes.

É claro que, se, para um conjunto de geradores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, adicionamos uma combinação linear dos vetores de conjunto, o subespaço gerado for o mesmo:

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = \left\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \sum_{j=1}^{k} a_j v_j \right\rangle$$

É fácil deduzir que, se os vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ forem linearmente dependentes, podemos gerar o mesmo subespaço vetorial com um vetor menos.

Um vetor sobrou aqui, estranho

Por exemplo, o seguinte subespaço vetorial é gerado por três vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}:$$

$$S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \{ y\mathbf{v}_1 + z\mathbf{v}_2 + w\mathbf{v}_3 : y, z, w \in \mathbb{R} \}$$

Um vetor sobrou aqui, estranho

Por exemplo, o seguinte subespaço vetorial é gerado por três vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}:$$

$$S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \{y\mathbf{v}_1 + z\mathbf{v}_2 + w\mathbf{v}_3 : y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

Mas esses vetores são linearmente dependentes:

$$\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0$$

Um vetor sobrou aqui, estranho

Por exemplo, o seguinte subespaço vetorial é gerado por três vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}:$$

$$S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \{ y\mathbf{v}_1 + z\mathbf{v}_2 + w\mathbf{v}_3 : y, z, w \in \mathbb{R} \}$$

Mas esses vetores são linearmente dependentes:

$$\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0$$

E podemos limpar um, por exemplo $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, e escrever:

$$S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$$

Um vetor sobrou aqui, estranho

Por exemplo, o seguinte subespaço vetorial é gerado por três vetores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \{ y\mathbf{v}_1 + z\mathbf{v}_2 + w\mathbf{v}_3 : y, z, w \in \mathbb{R} \}$$

Mas esses vetores são linearmente dependentes:

$$\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0$$

E podemos limpar um, por exemplo $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, e escrever:

$$S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$$

Mas também podemos limpar $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_1$ ou $\mathbf{v}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$, e escrever:

$$S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle$$

Exercício

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes e quais são geradores de $S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$?

Exercício

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes e quais são geradores de $S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$?

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Exercício

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes e quais são geradores de $S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$?

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- $\{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

Exercício

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes e quais são geradores de $S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$?

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- $\{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$

Exercício

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes e quais são geradores de $S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$?

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- $\{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4\}$

Exercício

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes e quais são geradores de $S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$?

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- $\{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4\}$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$

Exercício

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes e quais são geradores de $S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$?

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- $\{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4\}$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$
- $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$

coeficientes de um vetor em uma base

Os vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ são uma base de S se e somente se algum vetor $\mathbf{w} \in S$ puder ser expresso como uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de uma maneira única.

coeficientes de um vetor em uma base

Os vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ são uma base de S se e somente se algum vetor $\mathbf{w} \in S$ puder ser expresso como uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de uma maneira única.

- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ gera S, então qualquer $\mathbf{w} \in S$ pode ser escrito

  $$\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k$$

  Se houvesse outra combinação linear diferente:

  $$\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_k\mathbf{v}_k$$

  Então $(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_k - y_k)\mathbf{v}_k = 0$, mas como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é linearmente independente, os coeficientes $x_j - y_j$ devem ser 0.

coeficientes de um vetor em uma base

Os vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ são uma base de S se e somente se algum vetor $\mathbf{w} \in S$ puder ser expresso como uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de uma maneira única.

- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ gera S, então qualquer $\mathbf{w} \in S$ pode ser escrito

  $$\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k$$

  Se houvesse outra combinação linear diferente:

  $$\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_k\mathbf{v}_k$$

  Então $(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_k - y_k)\mathbf{v}_k = 0$, mas como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é linearmente independente, os coeficientes $x_j - y_j$ devem ser 0.
- Se tudo $\mathbf{w} \in S$ puder ser expresso como uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, fica claro que eles geram S.
  Além disso, $\mathbf{0}$ é uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de uma maneira única, com coeficientes iguais a 0, então é um conjunto linearmente independente.

coeficientes de um vetor em uma base

Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é uma base de S e $\mathbf{w} \in S$, os **coeficientes de w na base** $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ são *os únicos números reais* $x_1, \ldots, x_k$ como:

$$\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k$$

coeficientes de um vetor em uma base

Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ é uma base de S e $\mathbf{w} \in S$, os **coeficientes de w na base** $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ são *os únicos números reais* $x_1, \dots, x_k$ como:

$$\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k$$

Nós os encontramos resolvendo um sistema de equações lineares, de maneira matrizial

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w}$$

onde A é a matriz $n \times k$ cujas colunas são os vetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ e $\mathbf{x}$ é o vetor desconhecido:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k \end{array}\right], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

coeficientes de um vetor em uma base

Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é uma base de S e $\mathbf{w} \in S$, os **coeficientes de w na base** $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ são *os únicos números reais* $x_1, \ldots, x_k$ como:

$$\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k$$

Nós os encontramos resolvendo um sistema de equações lineares, de maneira matrizial

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w}$$

onde A é a matriz $n \times k$ cujas colunas são os vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ e $\mathbf{x}$ é o vetor desconhecido:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k \end{array}\right], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

... e se propusemos esse sistema de equações com $\mathbf{w} \notin S$, ele não possui solução.

Lema

Suponha que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ seja um conjunto de vetores linearmente independentes do subespaço S gerados por $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$.
Então $k \leq m$.

Lema

Suponha que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ seja um conjunto de vetores linearmente independentes do subespaço S gerados por $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$.
Então $k \leq m$.

Lema

Suponha que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ seja um conjunto de vetores linearmente independentes do subespaço S gerados por $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$.
Então $k \leq m$.

- Como $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S, o vetor $\mathbf{u}_1$ é uma combinação linear:

$$\mathbf{v}_1 = z_1\mathbf{w}_1 + \cdots + z_m\mathbf{w}_m$$

  E pelo menos um dos z_j não é nulo. Podemos limpar isso $\mathbf{w}_j$ e deduzir que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{w}_{j+1}, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S.

Lema

Suponha que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ seja um conjunto de vetores linearmente independentes do subespaço S gerados por $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$.
Então $k \leq m$.

- Como $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S, o vetor $\mathbf{u}_1$ é uma combinação linear:

$$\mathbf{v}_1 = z_1\mathbf{w}_1 + \cdots + z_m\mathbf{w}_m$$

  E pelo menos um dos z_j não é nulo. Podemos limpar isso $\mathbf{w}_j$ e deduzir que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{w}_{j+1}, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S.
- Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{w}_{j+1}, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S, o vetor $\mathbf{v}_2$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $m-1$ vetores do todo $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$.
  Não pode acontecer que nessa combinação linear, todos os coeficientes dos vetores de $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ sejam nulos, porque então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ não seria linearmente independente (teríamos uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ igual a zero).

Lema

Suponha que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ seja um conjunto de vetores linearmente independentes do subespaço S gerados por $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$.
Então $k \leq m$.

- Como $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S, o vetor $\mathbf{u}_1$ é uma combinação linear:

$$\mathbf{v}_1 = z_1\mathbf{w}_1 + \cdots + z_m\mathbf{w}_m$$

  E pelo menos um dos z_j não é nulo. Podemos limpar isso $\mathbf{w}_j$ e deduzir que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{w}_{j+1}, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S.
- Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{w}_{j+1}, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S, o vetor $\mathbf{v}_2$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $m-1$ vetores do todo $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$.
  Não pode acontecer que nessa combinação linear, todos os coeficientes dos vetores de $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ sejam nulos, porque então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ não seria linearmente independente (teríamos uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ igual a zero).
- Após j etapas, sabemos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j\}$ juntamente com $m-j$ vetores de $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$, eles geram S, então o vetor $\mathbf{v}_{j+1}$ é uma combinação linear desse conjunto.
  Não pode acontecer que nessa combinação linear, todos os coeficientes dos vetores de $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ sejam nulos, porque então $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j\}$ não seria linearmente independente. Em particular, m deve ser maior que j, mas podemos iterar esse processo até $j = k$, depois $k < m$.

Conjuntos de geradores vs conjuntos linearmente independentes

- Qualquer conjunto de vetores linearmente independentes de um subespaço S pode ser concluído até que uma base seja obtida.
- A partir de qualquer conjunto de geradores, podemos eliminar alguns vetores até você obter uma base.

Conjuntos de geradores vs conjuntos linearmente independentes

- Qualquer conjunto de vetores linearmente independentes de um subespaço S pode ser concluído até que uma base seja obtida.
- A partir de qualquer conjunto de geradores, podemos eliminar alguns vetores até você obter uma base.

- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for linearmente independente, mas não é uma base, é que existe um vetor $\mathbf{w} \in S$ que não é uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.
  O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}\}$ também é linearmente independente.
  Se não gerar S, repetimos o processo.Como uma linha de vetores linearmente independentes de S, não pode ter mais elementos do que um conjunto de geradores, o processo deve terminar em uma base.

Conjuntos de geradores vs conjuntos linearmente independentes

- Qualquer conjunto de vetores linearmente independentes de um subespaço S pode ser concluído até que uma base seja obtida.
- A partir de qualquer conjunto de geradores, podemos eliminar alguns vetores até você obter uma base.

- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for linearmente independente, mas não é uma base, é que existe um vetor $\mathbf{w} \in S$ que não é uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.
  O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}\}$ também é linearmente independente.
  Se não gerar S, repetimos o processo.Como uma linha de vetores linearmente independentes de S, não pode ter mais elementos do que um conjunto de geradores, o processo deve terminar em uma base.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S, mas não é linearmente independente, há uma combinação linear:

$$z_1\mathbf{w}_1 + \cdots + z_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0}$$

com pelo menos um número z_j não nulo.Então podemos limpar:

$$\mathbf{w}_j = \frac{-z_1}{\;}\mathbf{w}_1 + \cdots + \frac{-z_{j-1}}{\;}\mathbf{w}_{j-1} + \frac{-z_{j+1}}{\;}\mathbf{w}_{j+1} + \cdots + z_m\mathbf{w}_m$$

dimensão de um subespaço vetorial

Dimensión de S

A **dimenção** de um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^n$ é o *número de elementos* de uma base.

dimensão de um subespaço vetorial

Dimensión de S

A **dimenção** de um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^n$ é o *número de elementos* de uma base.

Consequências fáceis do que vimos:

dimensão de um subespaço vetorial

Dimensión de S

A **dimenção** de um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^n$ é o *número de elementos* de uma base.

Consequências fáceis do que vimos:

- O número de elementos de qualquer base é sempre o mesmo.

dimensão de um subespaço vetorial

Dimensión de S

A **dimenção** de um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^n$ é o *número de elementos* de uma base.

Consequências fáceis do que vimos:

- O número de elementos de qualquer base é sempre o mesmo.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ for linearmente independente e estiver contido em um subespaço S da dimensão k, então é a base de S.

dimensão de um subespaço vetorial

Dimensión de S

A **dimenção** de um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^n$ é o *número de elementos* de uma base.

Consequências fáceis do que vimos:

- O número de elementos de qualquer base é sempre o mesmo.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for linearmente independente e estiver contido em um subespaço S da dimensão k, então é a base de S.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S e $\dim(S) = m$, então é a base de S.

dimensão de um subespaço vetorial

Dimensión de S

A **dimenção** de um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^n$ é o *número de elementos* de uma base.

Consequências fáceis do que vimos:

- O número de elementos de qualquer base é sempre o mesmo.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for linearmente independente e estiver contido em um subespaço S da dimensão k, então é a base de S.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S e $\dim(S) = m$, então é a base de S.
- Se um subespaço S estiver contido em outro T e tiver a mesma dimensão, eles são iguais.

dimensões e bases dos subespaços vetoriais usuais

subespaço trivial. Dizemos que *A dimensão do subespaço trivial* (cujo único elemento é o vetor zero) é 0.

dimensões e bases dos subespaços vetoriais usuais

subespaço trivial. Dizemos que *A dimensão do subespaço trivial* (cujo único elemento é o vetor zero) é 0.

reta vetorial. A **reta vetorial** é um subespaço que pode ser gerado por um único vetor $\mathbf{v}$ não nulo (e, portanto, não é o subespaço trivial).Sua dimensão é 1.Qualquer conjunto com um único elemento $\lambda\mathbf{v}$ para $\lambda \neq 0$ é uma base.

dimensões e bases dos subespaços vetoriais usuais

subespaço trivial. Dizemos que *A dimensão do subespaço trivial* (cujo único elemento é o vetor zero) é 0.

reta vetorial. A **reta vetorial** é um subespaço que pode ser gerado por um único vetor $\mathbf{v}$ não nulo (e, portanto, não é o subespaço trivial).Sua dimensão é 1.Qualquer conjunto com um único elemento $\lambda\mathbf{v}$ para $\lambda \neq 0$ é uma base.

plano. A **plano vetorial** é um subespaço que pode ser gerado por dois vetores que não são um múltiplo do outro (e, portanto, não é uma linha).Sua dimensão é 2.Qualquer conjunto $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ com dois elementos de modo que $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ não são um múltiplo do outro é uma base.

dimensões e bases dos subespaços vetoriais usuais

subespaço trivial. Dizemos que *A dimensão do subespaço trivial* (cujo único elemento é o vetor zero) é 0.

reta vetorial. A **reta vetorial** é um subespaço que pode ser gerado por um único vetor **v** não nulo (e, portanto, não é o subespaço trivial).Sua dimensão é 1.Qualquer conjunto com um único elemento $\lambda\mathbf{v}$ para $\lambda \neq 0$ é uma base.

plano. A **plano vetorial** é um subespaço que pode ser gerado por dois vetores que não são um múltiplo do outro (e, portanto, não é uma linha).Sua dimensão é 2.Qualquer conjunto $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ com dois elementos de modo que $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ não são um múltiplo do outro é uma base.

Espaço total. Veremos mais tarde *é impossível gerar o espaço total* $\mathbb{R}^n$ *com menos de n vetores*, então *A dimensão do espaço total é n*.

Ortogonal de um subespaço

$S^\perp$ é o ortogonal a S

O **subespaço ortogonal** para um subespaço vetorial S (também é chamado **complemento ortogonal**):

$$S = \{z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \; z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

É o conjunto de todos os vetores $\mathbf{w}$ que são ortogonais a todos os vetores de S:

$$S^\perp = \{\mathbf{w} : \; \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ para todos} \mathbf{v} \in S\}$$

Ortogonal de um subespaço

$S^\perp$ é o ortogonal a S

O **subespaço ortogonal** para um subespaço vetorial S (também é chamado **complemento ortogonal**):

$$S = \{z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \; z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

É o conjunto de todos os vetores **w** que são ortogonais a todos os vetores de S:

$$S^\perp = \{\mathbf{w} : \; \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ para todos} \mathbf{v} \in S\}$$

É suficiente comprobar ortogonalidad aos geradores

Se **w** é ortogonal para $\mathbf{v}_j$ para $j = 1 \ldots k$, é ortogonal a tudo S.

Então podemos escrever

$$S^\perp = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle^\perp = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}^\perp$$

Exemplo de subespaço ortogonal

Calculamos a ortogonal para o seguinte subespaço:

$$\{y\mathbf{v}_1 + z\mathbf{v}_2 : y, z \in \mathbb{R}\}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo de subespaço ortogonal

Calculamos a ortogonal para o seguinte subespaço:

$$\{y\mathbf{v}_1 + z\mathbf{v}_2 : y, z \in \mathbb{R}\}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eles são os vetores $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que são ortogonais para $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \mathbf{v}_2^T \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{array}{cccc} 2x & +y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Exemplo de subespaço ortogonal

Calculamos a ortogonal para o seguinte subespaço:

$$\{y\mathbf{v}_1 + z\mathbf{v}_2 : y, z \in \mathbb{R}\}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eles são os vetores $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que são ortogonais para $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \mathbf{v}_2^T \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{array}{cccccc} 2x & +y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$S^{\perp} = \left\{ y \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Exemplo de subespaço ortogonal

Calculamos a ortogonal para o seguinte subespaço:

$$\{y\mathbf{v}_1 + z\mathbf{v}_2 : y, z \in \mathbb{R}\}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eles são os vetores $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que são ortogonais para $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \mathbf{v}_2^T \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{array}{cccc} 2x & +y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$S^\perp = \left\{ y \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$S^\perp$ é o conjunto de soluções de um sistema de equações homogêneas!

Ortogonal de um subespaço vetorial e sistemas de ecuações lineares homogéneas

$S^\perp$ é *sempre* o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares homogêneas!

Ortogonal de um subespaço vetorial e sistemas de ecuações lineares homogéneas

$S^{\perp}$ é *sempre* o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares homogêneas!
Então $S^{\perp}$ *é sempre um subespaço vetorial*!

Ortogonal de um subespaço vetorial e sistemas de ecuações lineares homogéneas

$S^{\perp}$ é *sempre* o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares homogêneas!
Então $S^{\perp}$ *é sempre um subespaço vetorial*!

Qual é a dimensão deste subespaço vetorial?

Ortogonal de um subespaço vetorial e sistemas de ecuações lineares homogéneas

$S^{\perp}$ é *sempre* o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares homogêneas!
Então $S^{\perp}$ *é sempre um subespaço vetorial*!

Qual é a dimensão deste subespaço vetorial? Propomos o sistema de equações:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{v}_k^T \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O método de Gauss nos permite encontrar um sistema de equações com as mesmas soluções e escalonados, para que o subespaço vetorial de soluções seja formado

$$S^{\perp} = \{y_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + y_m \cdot \mathbf{w}_m : \; y_1, \dots y_m \in \mathbb{R}\}$$

onde m é o número de variáveis gratuitas ao colocar o sistema em uma forma escalonada.

Ortogonal de um subespaço vetorial e sistemas de ecuações lineares homogéneas

$S^\perp$ é *sempre* o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares homogêneas!
Então $S^\perp$ *é sempre um subespaço vetorial*!

Qual é a dimensão deste subespaço vetorial? Propomos o sistema de equações:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{v}_k^T \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O método de Gauss nos permite encontrar um sistema de equações com as mesmas soluções e escalonados, para que o subespaço vetorial de soluções seja formado

$$S^\perp = \{y_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + y_m \cdot \mathbf{w}_m : \; y_1, \dots y_m \in \mathbb{R}\}$$

onde m é o número de variáveis gratuitas ao colocar o sistema em uma forma escalonada. Mas fazer operações elementares nas fileiras da matriz é equivalente a tomar combinações lineares de $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$: *o número de variáveis vinculadas no sistema escalonado equivalente é menor que k se e apenas os vetores são dependentes lineares.* $n - k$.

O ortogonal da ortogonal para S

É claro que $S \subset S^{\perp\perp}$ e, como eles têm a mesma dimensão, deduzimos que são iguais.

Isso nos permite *expresse um subespaço vetorial como o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares homogêneas*.

O ortogonal da ortogonal para S

É claro que $S \subset S^{\perp\perp}$ e, como eles têm a mesma dimensão, deduzimos que são iguais.

Isso nos permite *expresse um subespaço vetorial como o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares homogêneas*.

Por exemplo, para $S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ Nós vimos isso

$$S^{\perp} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

O ortogonal da ortogonal para S

É claro que $S \subset S^{\perp\perp}$ e, como eles têm a mesma dimensão, deduzimos que são iguais.

Isso nos permite *expresse um subespaço vetorial como o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares homogêneas*.

Por exemplo, para $S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ Nós vimos isso

$S^{\perp} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$. Então

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : -\frac{1}{2}x + y = 0 \right\}$$

S e $S^\perp$

Descripção vetorial de S

Descripção implícita de $S^\perp$

$$
\begin{tikzcd}
S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \arrow[r] & S^\perp = \left\{ \mathbf{w} : \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0} \right\} \arrow[d, "\text{Método de Gauss}"] \\
S = \left\{ \mathbf{v} : \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \right] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \right\} \arrow[u, "\text{Método de Gauss}"] & S^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Descripção implícita de S

Descripção vetorial de $S^\perp$

Se começarmos com um sistema de geradores arbitrários

O que acontece se usarmos o método anterior com um sistema de geradores que não é uma base? Seja $S = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$

Se começarmos com um sistema de geradores arbitrários

O que acontece se usarmos o método anterior com um sistema de geradores que não é uma base? Seja $S = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ Propomos o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \ldots \\ \hline \mathbf{v}_k^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se começarmos com um sistema de geradores arbitrários

O que acontece se usarmos o método anterior com um sistema de geradores que não é uma base? Seja $S = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ Propomos o sistema de equações:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{v}_k^T \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método Gauss, alcançamos um sistema de equações com as mesmas soluções e cuja matriz coeficiente é escalonada:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_1^T \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{u}_m^T \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores da linha $\mathbf{u}_1^T, \dots, \mathbf{u}_m^T$ são combinações lineares de vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, geram o mesmo espaço e são linearmente independentes, porque a matriz de coeficientes é escalonada.Vejamos um exemplo ...

Exemplo

Queremos encontrar uma base do subespaço S e escrevê-lo implicitamente.

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Exemplo

Queremos encontrar uma base do subespaço S e escrevê-lo implicitamente.

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Propomos o sistema de equações:

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Queremos encontrar uma base do subespaço S e escrevê-lo implicitamente.

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Propomos o sistema de equações:

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicamos o método de Gauss para encontrar um sistema escamado equivalente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

..

Para colocar o sistema anterior de uma forma escalonada, adotamos combinações lineares das fileiras da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e apenas descartamos as fileiras nulas, então as novas linhas que encontramos:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Eles são uma base de S.

..

Para colocar o sistema anterior de uma forma escalonada, adotamos combinações lineares das fileiras da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e apenas descartamos as fileiras nulas, então as novas linhas que encontramos:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Eles são uma base de S. Além disso, agora é muito fácil resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para calcular $S^{\perp} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$. Portanto $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : y - z = 0 \right\}$

descrições de S e $S^\perp$

Descripção vetorial de S Descripção implícita de $S^\perp$

$$\begin{tikzcd}
S = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle \arrow[r] & S^\perp = \left\{ \mathbf{w} : \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{v}_k^T \end{array} \right] \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0} \right\} \arrow[d, "\text{Método de Gauss}"] \\
S = \left\{ \mathbf{v} : \left[\begin{array}{c} \mathbf{w}_1^T \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{w}_{n-k}^T \end{array} \right] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \right\} \arrow[u, "\text{Método de Gauss}"] & S^\perp = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k} \rangle \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Descripção implícita de S Descripção vetorial de $S^\perp$

dimensão de $S^\perp$ para alguns espaços

- A ortogonal para **subespaço trivial** é o espaço total e vice-versa. A dimensão do espaço trivial é 0, a do espaço total é $n - 0 = n$.

dimensão de $S^{\perp}$ para alguns espaços

- A ortogonal para **subespaço trivial** é o espaço total e vice-versa. A dimensão do espaço trivial é 0, a do espaço total é $n - 0 = n$.
- A **reta vetorial** em $\mathbb{R}^2$ tem dimensão 1, e seu ortogonal é outra linha de dimensão vetorial $2 - 1 = 1$.

dimensão de $S^\perp$ para alguns espaços

- A ortogonal para **subespaço trivial** é o espaço total e vice-versa. A dimensão do espaço trivial é 0, a do espaço total é $n - 0 = n$.
- A **reta vetorial** em $\mathbb{R}^2$ tem dimensão 1, e seu ortogonal é outra linha de dimensão vetorial $2 - 1 = 1$.
- O subespaço ortogonal para uma **reta vetorial** em $\mathbb{R}^3$ tem dimensão $3 - 1 = 2$: é um **plano vetorial**.

dimensão de $S^\perp$ para alguns espaços

- A ortogonal para **subespaço trivial** é o espaço total e vice-versa. A dimensão do espaço trivial é 0, a do espaço total é $n - 0 = n$.
- A **reta vetorial** em $\mathbb{R}^2$ tem dimensão 1, e seu ortogonal é outra linha de dimensão vetorial $2 - 1 = 1$.
- O subespaço ortogonal para uma **reta vetorial** em $\mathbb{R}^3$ tem dimensão $3 - 1 = 2$: é um **plano vetorial**.
- O subespaço ortogonal para um **reta vetorial** em $\mathbb{R}^n$ tem dimensão $n - 1$ (um subespaço da dimensão $S^\perp$ é chamado **hyperplano**).