Subespaços afins

Pablo Angulo, Fabricio Macià

Universidade Pedagogica de Maputo

Soluções de um sistema de equações não homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares* **não** *homogêneo*, as soluções têm a mesma forma:

Soluções de um sistema de equações não homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares* **não** *homogêneo*, as soluções têm a mesma forma:

$$\text{Forma implícita:} \left\{ \begin{array}{cccl} x & -2y & & = 1 \\ & y & -z & = -2. \end{array} \right.$$

Soluções de um sistema de equações não homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares* **não** *homogêneo*, as soluções têm a mesma forma:

$$\text{Forma implícita:} \left\{ \begin{array}{rrrl} x & -2y & & = 1 \\ & y & -z & = -2. \end{array} \right.$$

$$\text{forma paramétrica:} \{(2z-3, z-2, z), z \in \mathbb{R}\}$$

Soluções de um sistema de equações não homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares* **não** *homogêneo*, as soluções têm a mesma forma:

$$\text{Forma implícita:} \left\{ \begin{array}{rrrl} x & -2y & & = 1 \\ & y & -z & = -2. \end{array} \right.$$

$$\text{forma paramétrica:} \{(2z-3, z-2, z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Forma vetorial:} \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Soluções de um sistema de equações não homogêneas

Toda vez que resolvemos um *Sistema de equações lineares* **não** *homogêneo*, as soluções têm a mesma forma:

$$\text{Forma implícita:} \left\{ \begin{array}{cccc} x & -2y & & = 1 \\ & y & -z & = -2. \end{array} \right.$$

$$\text{forma paramétrica:} \{(2z-3, z-2, z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Forma vetorial:} \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

O forma vetorial mostra o conjunto de soluções como a soma de A **Solução particular** mais uma solução de **Sistema homogêneo associado**.

soluções de um sistema de equações não homogêneas

Vejamos outro exemplo em que o conjunto de soluções depende de três parâmetros:

soluções de um sistema de equações não homogêneas

Vejamos outro exemplo em que o conjunto de soluções depende de três parâmetros:

$$\text{Forma implícita:} \left\{ \begin{array}{cccc} x & -y & +z & -t = 1 \end{array} \right.$$

soluções de um sistema de equações não homogêneas

Vejamos outro exemplo em que o conjunto de soluções depende de três parâmetros:

$$\text{Forma implícita:} \left\{ \begin{array}{cccc} x & -y & +z & -t = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{forma paramétrica:} \{(y - z + t + 1, y, z, t), y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

soluções de um sistema de equações não homogêneas

Vejamos outro exemplo em que o conjunto de soluções depende de três parâmetros:

$$\text{Forma implícita: } \left\{ \; x \quad -y \quad +z \quad -t = 1 \right.$$

$$\text{forma paramétrica: } \{(y - z + t + 1, y, z, t), y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{forma vetorial: } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

O forma vetorial mostra o conjunto de soluções como a soma de A **Solução particular** mais uma solução de **sistema homogêneo associado**.

Afim Subespace

Subespacio afim

Um subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ é um **subespaço afim** se você pode expressar assim:

$$
\begin{aligned}
F &= \{P_0 + z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \ z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\} \\
F &= P_0 + \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle
\end{aligned}
$$

para um ponto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e certos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.
Chamamos P_0 um **Ponto** do subespaço afim F e os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$
A **Conjunto de geradores** do **Espaço de endereço** de F (que é um subespaço vetorial):

$$\vec{F} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k \rangle = \{z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \ z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

Afim Subespace

Subespacio afim

Um subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ é um **subespaço afim** se você pode expressar assim:

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{P_0 + z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \; z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\} \\ F & = & P_0 + \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle \end{array}$$

para um ponto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e certos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.
Chamamos P_0 um **Ponto** do subespaço afim F e os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$
A **Conjunto de geradores** do **Espaço de endereço** de F (que é um subespaço vetorial):

$$\vec{F} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k \rangle = \{z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \; z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

Um subespaço afim pode consistir apenas no ponto P_0 (porque também pode ser o conjunto de soluções de um sistema de equações).
Nesse caso, o subespaço vetorial associado é o subespaço trivial.

dimensão do subespaço Afim

Dimensão do espaço vetorial associado a un subespaço afim

A **dimensão** de um subespaço afim F é a dimensão do espaço de endereços $\vec{F}$: $\dim(F) = \dim(\vec{F})$.

dimensão do subespaço Afim

Dimensão do espaço vetorial associado a un subespaço afim

A **dimensão** de um subespaço afim F é a dimensão do espaço de endereços $\vec{F}$: $\dim(F) = \dim(\vec{F})$.

- Os subespaços afines 0 são aqueles que consistem em um único ponto.Observamos que, embora exista apenas um subespaço vetorial da dimensão 0, existem muitos subespaços afines que não a dimensão 0 (até pontos em $\mathbb{R}^n$).

dimensão do subespaço Afim

Dimensão do espaço vetorial associado a un subespaço afim

A **dimensão** de um subespaço afim F é a dimensão do espaço de endereços $\vec{F}$: $\dim(F) = \dim(\vec{F})$.

- Os subespaços afines 0 são aqueles que consistem em um único ponto.Observamos que, embora exista apenas um subespaço vetorial da dimensão 0, existem muitos subespaços afines que não a dimensão 0 (até pontos em $\mathbb{R}^n$).
- Um subespaço afim da dimensão 1 é chamado **reto afim** e seu espaço de direção é gerado por um único vetor não nulo.

dimensão do subespaço Afim

Dimensão do espaço vetorial associado a un subespaço afim

A **dimensão** de um subespaço afim F é a dimensão do espaço de endereços $\vec{F}$: $\dim(F) = \dim(\vec{F})$.

- Os subespaços afines 0 são aqueles que consistem em um único ponto.Observamos que, embora exista apenas um subespaço vetorial da dimensão 0, existem muitos subespaços afines que não a dimensão 0 (até pontos em $\mathbb{R}^n$).
- Um subespaço afim da dimensão 1 é chamado **reto afim** e seu espaço de direção é gerado por um único vetor não nulo.
- Um subespaço afim da dimensão 2 é chamado de **plano afim** e seu espaço de direção é gerado por dois vetores não proporcionais.

dimensão do subespaço Afim

Dimensão do espaço vetorial associado a un subespaço afim

A **dimensão** de um subespaço afim F é a dimensão do espaço de endereços $\vec{F}$: $\dim(F) = \dim(\vec{F})$.

- Os subespaços afines 0 são aqueles que consistem em um único ponto.Observamos que, embora exista apenas um subespaço vetorial da dimensão 0, existem muitos subespaços afines que não a dimensão 0 (até pontos em $\mathbb{R}^n$).
- Um subespaço afim da dimensão 1 é chamado **reto afim** e seu espaço de direção é gerado por um único vetor não nulo.
- Um subespaço afim da dimensão 2 é chamado de **plano afim** e seu espaço de direção é gerado por dois vetores não proporcionais.
- Um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $n-1$ é chamado **hiperplano afim**.

dimensão do subespaço Afim

Dimensão do espaço vetorial associado a un subespaço afim

A **dimensão** de um subespaço afim F é a dimensão do espaço de endereços $\vec{F}$: $\dim(F) = \dim(\vec{F})$.

- Os subespaços afines 0 são aqueles que consistem em um único ponto.Observamos que, embora exista apenas um subespaço vetorial da dimensão 0, existem muitos subespaços afines que não a dimensão 0 (até pontos em $\mathbb{R}^n$).
- Um subespaço afim da dimensão 1 é chamado **reto afim** e seu espaço de direção é gerado por um único vetor não nulo.
- Um subespaço afim da dimensão 2 é chamado de **plano afim** e seu espaço de direção é gerado por dois vetores não proporcionais.
- Um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $n-1$ é chamado **hiperplano afim**.
- O único subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ da dimensão n é **espaço total**.

Exemplo: uma linha afim

Por exemplo, o conjunto de soluções de:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & -2y & & = 1 \\ & y & -z & = -2. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo: uma linha afim

Por exemplo, o conjunto de soluções de:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & & = 1 \\ & y & -z & = -2. \end{array}\right.$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

É um subespaço afim dado pelo ponto $P_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e o vetor

$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.É uma linha afim.

Exemplo: um hiperplano afim

O conjunto de soluções de:

$$\{x - y + z - t = 1$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo: um hiperplano afim

O conjunto de soluções de:

$$\{x - y + z - t = 1$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

É um subespaço afim dado pelo ponto $P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e vetores

$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.É um **hiperplano afim** de $\mathbb{R}^4$.

o espaço de endereço

Lema

O **espaço de endereço** $\vec{F}$ de um subespaço afim é o conjunto de todos os vetores $\overrightarrow{PQ}$ quando P e Q são pontos de F.

o espaço de endereço

Lema

O **espaço de endereço** $\vec{F}$ de um subespaço afim é o conjunto de todos os vetores $\overrightarrow{PQ}$ quando P e Q são pontos de F.

Demonstração: Podemos escrever

$$P = P_0 + y_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + y_k \cdot \mathbf{v}_k, \; Q = P_0 + z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k$$

e então o vetor $\overrightarrow{PQ}$ está escrito

$$\overrightarrow{PQ} = (z_1 - y_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + (z_k - y_k) \cdot \mathbf{v}_k$$

o espaço de endereço

Lema

O **espaço de endereço** $\vec{F}$ de um subespaço afim é o conjunto de todos os vetores $\overrightarrow{PQ}$ quando P e Q são pontos de F.

Demonstração: Podemos escrever

$$P = P_0 + y_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + y_k \cdot \mathbf{v}_k, \; Q = P_0 + z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k$$

e então o vetor $\overrightarrow{PQ}$ está escrito

$$\overrightarrow{PQ} = (z_1 - y_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + (z_k - y_k) \cdot \mathbf{v}_k$$

Já sabemos que é possível encontrar muitos conjuntos de geradores para $\vec{F}$. Os mais interessantes são **Bases**, que são os conjuntos de geradores linearmente independentes.

Vamos revisar os principais conceitos ...

revisão: Conjuntos de geradores e conjuntos linearmente independentes.

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $\dim(S) = m$:

- Todas as bases de S têm m elementos.

revisão: Conjuntos de geradores e conjuntos linearmente independentes.

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $\dim(S) = m$:

- Todas as bases de S têm m elementos.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente, então $k \leq m$.

revisão: Conjuntos de geradores e conjuntos linearmente independentes.

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $\dim(S) = m$:

- Todas as bases de S têm m elementos.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente, então $k \leq m$.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente com m elementos, é a base de S.

revisão: Conjuntos de geradores e conjuntos linearmente independentes.

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $\dim(S) = m$:

- Todas as bases de S têm m elementos.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente, então $k \leq m$.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente com m elementos, é a base de S.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for um conjunto de vetores de S linearmente independente e $k < m$, podemos adicionar $m - k$ vetores até você obter uma base.

revisão: Conjuntos de geradores e conjuntos linearmente independentes.

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $\dim(S) = m$:

- Todas as bases de S têm m elementos.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente, então $k \leq m$.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente com m elementos, é a base de S.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for um conjunto de vetores de S linearmente independente e $k < m$, podemos adicionar $m - k$ vetores até você obter uma base.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ gera S, então $k \geq m$.

revisão: Conjuntos de geradores e conjuntos linearmente independentes.

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $\dim(S) = m$:

- Todas as bases de S têm m elementos.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente, então $k \leq m$.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente com m elementos, é a base de S.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for um conjunto de vetores de S linearmente independente e $k < m$, podemos adicionar $m - k$ vetores até você obter uma base.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ gera S, então $k \geq m$.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S e possui m elementos, é a base de S.

revisão: Conjuntos de geradores e conjuntos linearmente independentes.

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $\dim(S) = m$:

- Todas as bases de S têm m elementos.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente, então $k \leq m$.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente com m elementos, é a base de S.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for um conjunto de vetores de S linearmente independente e $k < m$, podemos adicionar $m - k$ vetores até você obter uma base.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ gera S, então $k \geq m$.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S e possui m elementos, é a base de S.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ gera S e $k > m$, podemos eliminar $k - m$ vetores do conjunto até obter uma base.

revisão: Conjuntos de geradores e conjuntos linearmente independentes.

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $\dim(S) = m$:

- Todas as bases de S têm m elementos.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente, então $k \leq m$.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é um conjunto de vetores de S linearmente independente com m elementos, é a base de S.
- Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for um conjunto de vetores de S linearmente independente e $k < m$, podemos adicionar $m - k$ vetores até você obter uma base.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ gera S, então $k \geq m$.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ gera S e possui m elementos, é a base de S.
- Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ gera S e $k > m$, podemos eliminar $k - m$ vetores do conjunto até obter uma base.
- Se S estiver contido em outro subespaço T da mesma dimensão, eles são os mesmos.

diferentes maneiras de descrever um subespaço afim

Subespacios afines con el mismo espacio de direcciones

Dois subespaços afines

$$F = \{P_0 + z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \ z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{Q_0 + y_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + y_m \cdot \mathbf{w}_m : \ y_1, \ldots y_m \in \mathbb{R}\}$$

Eles são os mesmos sim e somente se $\vec{F} = \vec{G}$ e têm pelo menos um ponto em comum.

Dizemos que F e G são **parallel** se $\vec{F} = \vec{G}$, mas $F \neq G$.

diferentes maneiras de descrever um subespaço afim

Subespacios afines con el mismo espacio de direcciones

Dois subespaços afines

$$F = \{P_0 + z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \ z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{Q_0 + y_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + y_m \cdot \mathbf{w}_m : \ y_1, \ldots y_m \in \mathbb{R}\}$$

Eles são os mesmos sim e somente se $\vec{F} = \vec{G}$ e têm pelo menos um ponto em comum.
Dizemos que F e G são **parallel** se $\vec{F} = \vec{G}$, mas $F \neq G$.

Vamos ver se entendemos

- O número de geradores de $\vec{F}$ e $\vec{G}$ nas definições de F e G pode ser diferente e ainda $\vec{F}$ pode ser igual a $\vec{G}$ (mas $\dim(F)$ deve ser igual a $\dim(G)$).

Subespacios afines con el mismo espacio de direcciones

Dois subespaços afines

$$F = \{P_0 + z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \; z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{Q_0 + y_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + y_m \cdot \mathbf{w}_m : \; y_1, \ldots y_m \in \mathbb{R}\}$$

Eles são os mesmos sim e somente se $\vec{F} = \vec{G}$ e têm pelo menos um ponto em comum.
Dizemos que F e G são **parallel** se $\vec{F} = \vec{G}$, mas $F \neq G$.

Vamos ver se entendemos

- O número de geradores de $\vec{F}$ e $\vec{G}$ nas definições de F e G pode ser diferente e ainda $\vec{F}$ pode ser igual a $\vec{G}$ (mas dim(F) deve ser igual a dim(G)).
- Sim $\vec{F} = \vec{G}$ e $P_0 \in G$, então $F = G$.

Subespacios afines con el mismo espacio de direcciones

Dois subespaços afines

$$F = \{P_0 + z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \; z_1, \dots z_k \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{Q_0 + y_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + y_m \cdot \mathbf{w}_m : \; y_1, \dots y_m \in \mathbb{R}\}$$

Eles são os mesmos sim e somente se $\vec{F} = \vec{G}$ e têm pelo menos um ponto em comum.

Dizemos que F e G são **parallel** se $\vec{F} = \vec{G}$, mas $F \neq G$.

Vamos ver se entendemos

- O número de geradores de $\vec{F}$ e $\vec{G}$ nas definições de F e G pode ser diferente e ainda $\vec{F}$ pode ser igual a $\vec{G}$ (mas $\dim(F)$ deve ser igual a $\dim(G)$).
- Sim $\vec{F} = \vec{G}$ e $P_0 \in G$, então $F = G$.
- Sim $\vec{F} = \vec{G}$ e $Q_0 \in F$, então $F = G$.

diferentes maneiras de descrever um subespaço afim

Subespacios afines con el mismo espacio de direcciones

Dois subespaços afines

$$F = \{P_0 + z_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \cdot \mathbf{v}_k : \; z_1, \ldots z_k \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{Q_0 + y_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + y_m \cdot \mathbf{w}_m : \; y_1, \ldots y_m \in \mathbb{R}\}$$

Eles são os mesmos sim e somente se $\vec{F} = \vec{G}$ e têm pelo menos um ponto em comum.
Dizemos que F e G são **parallel** se $\vec{F} = \vec{G}$, mas $F \neq G$.

Vamos ver se entendemos

- O número de geradores de $\vec{F}$ e $\vec{G}$ nas definições de F e G pode ser diferente e ainda $\vec{F}$ pode ser igual a $\vec{G}$ (mas $\dim(F)$ deve ser igual a $\dim(G)$).
- Sim $\vec{F} = \vec{G}$ e $P_0 \in G$, então $F = G$.
- Sim $\vec{F} = \vec{G}$ e $Q_0 \in F$, então $F = G$.
- Sim $\vec{F} = \vec{G}$, então $F = G$ sim e somente se $\overrightarrow{Q_0P_0} \in \vec{G}$.

Exemplo: uma linha afim

Por exemplo, o conjunto de soluções de:

$$\begin{cases} x & -2y & & = 1 \\ & y & -z & = -2. \end{cases}$$

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo: uma linha afim

Por exemplo, o conjunto de soluções de:

$$\begin{cases} x & -2y & & = 1 \\ & y & -z & = -2. \end{cases}$$

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Você também pode escrever

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo: um hiperplano afim

O conjunto de soluções de:

$$\{x - y + z - t = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Exemplo: um hiperplano afim

O conjunto de soluções de:

$$\{x - y + z - t = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

TB pode ser escrita

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Exercício

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qual é a dimensão de cada um dos seguintes espaços afines?

Exercício

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qual é a dimensão de cada um dos seguintes espaços afines?

- $P + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$

Exercício

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qual é a dimensão de cada um dos seguintes espaços afines?

- $P + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_2 \rangle$

Exercício

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qual é a dimensão de cada um dos seguintes espaços afines?

- $P + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_2 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$

Exercício

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qual é a dimensão de cada um dos seguintes espaços afines?

- $P + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_2 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle$

Exercício

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qual é a dimensão de cada um dos seguintes espaços afines?

- $P + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_2 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$

Exercício

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qual é a dimensão de cada um dos seguintes espaços afines?

- $P + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_2 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$
- $P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$

Exercício

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Identifique todas as relações de inclusão entre esses subespaços afines:

$$P + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$$

$$P + \langle \mathbf{v}_2 \rangle \qquad\qquad P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$$

$$P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle \qquad\qquad P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$$

$$P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$$

Exercício

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Identifique todas as relações de inclusão entre esses subespaços afines:

$$\begin{tikzcd}
 & P + \langle \mathbf{v}_1 \rangle \arrow[dr, hook] & \\
P + \langle \mathbf{v}_2 \rangle \arrow[rr, hook] & & P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \arrow[d, hook] \arrow[dll, equal] \\
P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle & & P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle \arrow[dl, equal] \\
 & P + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle &
\end{tikzcd}$$

Afine Reference

Seja F um subespaço afim com espaço de direção $\vec{F}$. Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é uma base de $\vec{F}$ e $P_0 \in F$ é qualquer ponto de F, dizemos que $P_0, \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é uma **referência afim**.

Afine Reference

Seja F um subespaço afim com espaço de direção $\vec{F}$. Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é uma base de $\vec{F}$ e $P_0 \in F$ é qualquer ponto de F, dizemos que $P_0, \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é uma **referência afim**.

Lema

Qualquer ponto $Q \in F$ pode ser escrito de forma exclusiva:

$$Q = P_0 + z_1\mathbf{v}_1 + \cdots + z_k\mathbf{v}_k$$

para números reais $z_1, \ldots, z_k$ que são chamados de **coordenadas de Q na referência** $P_0, \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

Afine Reference

Seja F um subespaço afim com espaço de direção $\vec{F}$. Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é uma base de $\vec{F}$ e $P_0 \in F$ é qualquer ponto de F, dizemos que $P_0, \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é uma **referência afim**.

Lema

Qualquer ponto $Q \in F$ pode ser escrito de forma exclusiva:

$$Q = P_0 + z_1\mathbf{v}_1 + \cdots + z_k\mathbf{v}_k$$

para números reais $z_1, \ldots, z_k$ que são chamados de **coordenadas de Q na referência** $P_0, \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

Demonstração: $\overrightarrow{P_0Q}$ É um vetor de $\vec{F}$ e, portanto, pode ser expresso como uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de uma maneira única.

coordenadas

Como encontramos as coordenadas de P em referência $P_0, \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$?

coordenadas

Como encontramos as coordenadas de P em referência $P_0, \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$? Como esperado, *resolvendo um sistema de equações lineares*. Escrevemos o sistema de maneira matricial:

$$A \cdot \mathbf{x} = P - P_0$$

onde A é a matriz $n \times k$ cujas colunas são os vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, $\mathbf{x}$ é o vetor desconhecido e $P - P_0$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{P_0P}$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k \end{array} \right], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

coordenadas

Como encontramos as coordenadas de P em referência $P_0, \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$? Como esperado, *resolvendo um sistema de equações lineares*. Escrevemos o sistema de maneira matricial:

$$A \cdot \mathbf{x} = P - P_0$$

onde A é a matriz $n \times k$ cujas colunas são os vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, $\mathbf{x}$ é o vetor desconhecido e $P - P_0$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{P_0 P}$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k \end{array}\right], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

... e se propusemos esse sistema de equações com $P \notin F$, ele não possui solução.

Exemplo

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P_0, \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ Eles são uma referência afim $A = P_0 + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$. Estamos procurando as coordenadas de P

Exemplo

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P_0, \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ Eles são uma referência afim $A = P_0 + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$. Estamos procurando as coordenadas de P

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P - P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P_0, \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ Eles são uma referência afim $A = P_0 + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$. Estamos procurando as coordenadas de P

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P - P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução é $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$.

subespaço afim gerado por n pontos

Definición

O **subespaço afim gerado pelos pontos** $P_1, \ldots, P_n$ é o menor subespaço afim que contém esses pontos.

subespaço afim gerado por n pontos

Definición

O **subespaço afim gerado pelos pontos** $P_1, \ldots, P_n$ é o menor subespaço afim que contém esses pontos.

Lembramos que o **espaço de endereço** $\vec{F}$ de um subespaço afim é o conjunto de todos os vetores $\overrightarrow{PQ}$ quando P e Q são pontos de F.

subespaço afim gerado por n pontos

Definición

O **subespaço afim gerado pelos pontos** $P_1, \ldots, P_n$ é o menor subespaço afim que contém esses pontos.

Lembramos que o **espaço de endereço** $\vec{F}$ de um subespaço afim é o conjunto de todos os vetores $\overrightarrow{PQ}$ quando P e Q são pontos de F.
Portanto, se um subespaço afim contiver pontos $P_1, \ldots, P_n$, seu espaço de direção contém vetores $P_j - P_i$ para $i \neq j$.

subespaço afim gerado por n pontos

Definición

O **subespaço afim gerado pelos pontos** $P_1, \ldots, P_n$ é o menor subespaço afim que contém esses pontos.

Lembramos que o **espaço de endereço** $\vec{F}$ de um subespaço afim é o conjunto de todos os vetores $\overrightarrow{PQ}$ quando P e Q são pontos de F. Portanto, se um subespaço afim contiver pontos $P_1, \ldots, P_n$, seu espaço de direção contém vetores $P_j - P_i$ para $i \neq j$.

Lema

O **subespaço afim gerado pelos pontos** $P_1, \ldots, P_n$ é o subespaço do avental

$$P_1 + \left\langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1 P_n} \right\rangle$$

Então *A dimensão é menor ou igual ao número de menos pontos* 1.

subespaços afines ao ortogonal

Dizemos que dois subespaços afines F e G são **Ortogonal** se seus espaços de endereço $\vec{F}$ e $\vec{G}$ forem ortogonais.

subespaços afines ao ortogonal

Dizemos que dois subespaços afines F e G são **Ortogonal** se seus espaços de endereço $\vec{F}$ e $\vec{G}$ forem ortogonais.

Se S é um subespaço vetorial, ortogonal para S é um subespaço de vetor único.
No entanto, *existem muitos subespaços ortogonais afines a um subespaço afim F*.

subespaços afines ao ortogonal

Dizemos que dois subespaços afines F e G são **Ortogonal** se seus espaços de endereço $\vec{F}$ e $\vec{G}$ forem ortogonais.

Se S é um subespaço vetorial, ortogonal para S é um subespaço de vetor único.
No entanto, *existem muitos subespaços ortogonais afines a um subespaço afim* F.

Para quaisquer valores de $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, o subespaço afim:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \text{Solução de} \begin{cases} x & = a \\ \quad y & = b \end{cases}$$

É ortogonal ao subespaço afim:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \text{Solução de} \{ z = c$$