Transformações Lineares

Pablo Angulo, Fabricio Macià

Universidade Pedagogica de Maputo

Transformações de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

A **Transformação** T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ atribui a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ outro ponto $T(x) \in \mathbb{R}^m$.

Normalmente escrevemos assim:

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Exemplos de transformações:

- **(Homotecia:)** $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- **(tradução:)** $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x, y) = (x + 1, y)$;
- **(Identidade)** $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_3(x, y) = (x, y)$;
- **(simetria sobre o eixo x:)** $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_4(x, y) = (x, -y)$;
- **(simetria em relação ao eixo y:)** $T_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_5(x) = (-x, y)$;
- **(Soma dos quadrados)** $T_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_6(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
- **(Soma das coordenadas)** $T_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_7(x, y, z) = x + y + z$;
- **(Produto das coordenadas)** $T_8 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_7(x, y, z) = xyz$.

Produto para uma matriz

Se A é uma matriz $m \times n$, então $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ define uma transformação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Essas transformações são chamadas **lineares** porque têm essas duas propriedades:

- $T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$
- $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$

e A é chamado de *matriz da transformação linear* T.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, então

$T(x, y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2x, -x + y)$ é uma transformação linear.

Produto para uma matriz

Se A é uma matriz $m \times n$, então $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ define uma transformação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Essas transformações são chamadas **lineares** porque têm essas duas propriedades:

- $T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$
- $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$

e A é chamado de *matriz da transformação linear* T.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, então

$T(x, y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2x, -x + y)$ é uma transformação linear.

Exercício: demonstra que a seguinte transformação é linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = (x + y, x - y)$$

Ou seja, encontre uma matriz A para que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$.

Algumas propriedades de transformações lineares

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear com matriz A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Então ...

- $T(\mathbf{0}) = ...$
- $T(-\mathbf{u}) = ...$
- $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = ...$
- A imagem do subespaço vetorial $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ é ...
- Se $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é outra transformação linear com matriz B, então sua composição $\mathbf{x} \to R(T(\mathbf{x}))$ ...
- Se escrevermos $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_m(\mathbf{x}))$, cada função $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é ...

Algumas propriedades de transformações lineares

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear com matriz A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Então

- $T(\mathbf{0}) = \ A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $T(-\mathbf{u}) =$ ...
- $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) =$ ...
- A imagem do subespaço vetorial $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ é ...

- Se $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é outra transformação linear com matriz B, então sua composição $\mathbf{x} \to R(T(\mathbf{x}))$ ...

- Se escrevermos $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_m(\mathbf{x}))$, cada função $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é ...

Algumas propriedades de transformações lineares

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear com matriz A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Então

- $T(\mathbf{0}) = \ A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $T(-\mathbf{u}) = \ A \cdot (-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$
- $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) =$ ...
- A imagem do subespaço vetorial $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ é ...
- Se $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é outra transformação linear com matriz B, então sua composição $\mathbf{x} \to R(T(\mathbf{x}))$ ...
- Se escrevermos $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_m(\mathbf{x}))$, cada função $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é ...

Algumas propriedades de transformações lineares

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear com matriz A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Então

- $T(\mathbf{0}) = \ A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $T(-\mathbf{u}) = \ A \cdot (-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$
- $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = \ A \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aA \cdot \mathbf{u} + bB \cdot \mathbf{v} = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$
- A imagem do subespaço vetorial $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ é ...
- Se $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é outra transformação linear com matriz B, então sua composição $\mathbf{x} \to R(T(\mathbf{x}))$ ...
- Se escrevermos $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_m(\mathbf{x}))$, cada função $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é ...

Algumas propriedades de transformações lineares

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear com matriz A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Então

- $T(\mathbf{0}) = \ A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $T(-\mathbf{u}) = \ A \cdot (-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$
- $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = \ A \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aA \cdot \mathbf{u} + bB \cdot \mathbf{v} = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$
- A imagem do subespaço vetorial $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ é o subespaço vetorial $\langle T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_k) \rangle = \langle A \cdot \mathbf{v}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{v}_k \rangle$
- Se $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é outra transformação linear com matriz B, então sua composição $\mathbf{x} \to R(T(\mathbf{x}))$ ...

- Se escrevermos $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_m(\mathbf{x}))$, cada função $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é ...

Algumas propriedades de transformações lineares

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear com matriz A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Então

- $T(\mathbf{0}) = \; A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $T(-\mathbf{u}) = \; A \cdot (-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$
- $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = \; A \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aA \cdot \mathbf{u} + bB \cdot \mathbf{v} = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$
- A imagem do subespaço vetorial $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ é o subespaço vetorial $\langle T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_k) \rangle = \langle A \cdot \mathbf{v}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{v}_k \rangle$
- Se $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é outra transformação linear com matriz B, então sua composição $\mathbf{x} \to R(T(\mathbf{x}))$ é também uma transformação linear: $R(T(\mathbf{x})) = R(A \cdot \mathbf{x}) = B \cdot A \cdot \mathbf{x}$, com matriz $B \cdot A$.
- Se escrevermos $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_m(\mathbf{x}))$, cada função $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é ...

Algumas propriedades de transformações lineares

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear com matriz A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Então

- $T(\mathbf{0}) = \ A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $T(-\mathbf{u}) = \ A \cdot (-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$
- $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = \ A \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aA \cdot \mathbf{u} + bB \cdot \mathbf{v} = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$
- A imagem do subespaço vetorial $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ é o subespaço vetorial $\langle T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_k) \rangle = \langle A \cdot \mathbf{v}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{v}_k \rangle$
- Se $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é outra transformação linear com matriz B, então sua composição $\mathbf{x} \to R(T(\mathbf{x}))$ é também uma transformação linear: $R(T(\mathbf{x})) = R(A \cdot \mathbf{x}) = B \cdot A \cdot \mathbf{x}$, com matriz $B \cdot A$.
- Se escrevermos $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_m(\mathbf{x}))$, cada função $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear.
  E reciprocamente,

Algumas propriedades de transformações lineares

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear com matriz A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Então

- $T(\mathbf{0}) = \; A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $T(-\mathbf{u}) = \; A \cdot (-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$
- $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = \; A \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aA \cdot \mathbf{u} + bB \cdot \mathbf{v} = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$
- A imagem do subespaço vetorial $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ é o subespaço vetorial $\langle T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_k) \rangle = \langle A \cdot \mathbf{v}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{v}_k \rangle$
- Se $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é outra transformação linear com matriz B, então sua composição $\mathbf{x} \to R(T(\mathbf{x}))$ é também uma transformação linear: $R(T(\mathbf{x})) = R(A \cdot \mathbf{x}) = B \cdot A \cdot \mathbf{x}$, com matriz $B \cdot A$.
- Se escrevermos $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_m(\mathbf{x}))$, cada função $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear.
  E reciprocamente, Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função de que seus componentes $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são transformações lineares, então T é uma transformação linear.

identifica as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

Para as aplicações a seguir, decida se são lineares (e se são a matriz da transformação linear):

- **(Homotecia:)** $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;

Para as aplicações a seguir, decida se são lineares (e se são a matriz da transformação linear):

- (**Homotecia:**) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- (**tradução:**) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x, y) = (x + 1, y)$;

identifica as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

Para as aplicações a seguir, decida se são lineares (e se são a matriz da transformação linear):

- (**Homotecia:**) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- (**tradução:**) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x, y) = (x + 1, y)$;
- (**Identidade**) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_3(x, y) = (x, y)$;

identifica as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

Para as aplicações a seguir, decida se são lineares (e se são a matriz da transformação linear):

- (**Homotecia:**) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x,y) = (2x, 2y)$;
- (**tradução:**) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x,y) = (x+1, y)$;
- (**Identidade**) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_3(x,y) = (x, y)$;
- (**simetria em relação ao eixo x:**) $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_4(x,y) = (x, -y)$;

identifica as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

Para as aplicações a seguir, decida se são lineares (e se são a matriz da transformação linear):

- (**Homotecia:**) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- (**tradução:**) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x, y) = (x + 1, y)$;
- (**Identidade**) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_3(x, y) = (x, y)$;
- (**simetria em relação ao eixo x:**) $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_4(x, y) = (x, -y)$;
- (**simetria em relação ao eixo y:**) $T_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_5(x) = (-x, y)$;

identifica as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

Para as aplicações a seguir, decida se são lineares (e se são a matriz da transformação linear):

- (**Homotecia:**) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- (**tradução:**) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x, y) = (x + 1, y)$;
- (**Identidade**) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_3(x, y) = (x, y)$;
- (**simetria em relação ao eixo x:**) $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_4(x, y) = (x, -y)$;
- (**simetria em relação ao eixo y:**) $T_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_5(x) = (-x, y)$;
- (**Soma dos quadrados**) $T_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_6(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;

Para as aplicações a seguir, decida se são lineares (e se são a matriz da transformação linear):

- (**Homotecia:**) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- (**tradução:**) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x, y) = (x + 1, y)$;
- (**Identidade**) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_3(x, y) = (x, y)$;
- (**simetria em relação ao eixo x:**) $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_4(x, y) = (x, -y)$;
- (**simetria em relação ao eixo y:**) $T_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_5(x) = (-x, y)$;
- (**Soma dos quadrados**) $T_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_6(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
- (**soma das coordenadas**) $T_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_7(x, y, z) = x + y + z$;

identifica as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

Para as aplicações a seguir, decida se são lineares (e se são a matriz da transformação linear):

- **(Homotecia:)** $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x,y) = (2x, 2y)$;
- **(tradução:)** $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x,y) = (x+1, y)$;
- **(Identidade)** $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_3(x,y) = (x, y)$;
- **(simetria em relação ao eixo x:)** $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_4(x,y) = (x, -y)$;
- **(simetria em relação ao eixo y:)** $T_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_5(x) = (-x, y)$;
- **(Soma dos quadrados)** $T_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_6(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$;
- **(soma das coordenadas)** $T_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_7(x,y,z) = x + y + z$;
- **(Produto das coordenadas)** $T_8 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_7(x,y,z) = xyz$.

Matriz de transformação linear

Qualquer transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que verifique:

- $T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$
- $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$

É uma transformação linear: existe uma matriz *exclusiva* A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$.

Matriz de transformação linear

Qualquer transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que verifique:

- $T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$
- $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$

É uma transformação linear: existe uma matriz *exclusiva* A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$.

As colunas da matriz

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array} \right]$$

Eles devem ser as imagens por T dos vetores da base canônica.

$$\mathbf{a}_1 := T(1, 0, ..., 0), \quad \mathbf{a}_2 := T(0, 1, ..., 0), ..., \quad \mathbf{a}_n := T(0, 0, ..., 1).$$

Matriz de transformação linear

Qualquer transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que verifique:

- $T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$
- $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$

É uma transformação linear: existe uma matriz *exclusiva* A, de modo que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$.

As colunas da matriz

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array} \right]$$

Eles devem ser as imagens por T dos vetores da base canônica.

$$\mathbf{a}_1 := T(1, 0, ..., 0), \quad \mathbf{a}_2 := T(0, 1, ..., 0), ..., \quad \mathbf{a}_n := T(0, 0, ..., 1).$$

E então verificamos que

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_n\mathbf{a}_n = A \cdot \mathbf{x}$$

Transformação linear, conhecida a imagem dos vetores de uma base

Se soubermos $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ para uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ $\mathbb{R}^n$, podemos calcular $T(\mathbf{x})$ para qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
Escrevemos $\mathbf{x}$ como uma combinação linear dos vetores base:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

E então sua imagem deve ser

$$T(\mathbf{x}) = a_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n T(\mathbf{v}_n)$$

Transformação linear, conhecida a imagem dos vetores de uma base

Se soubermos $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ para uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ $\mathbb{R}^n$, podemos calcular $T(\mathbf{x})$ para qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
Escrevemos $\mathbf{x}$ como uma combinação linear dos vetores base:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

E então sua imagem deve ser

$$T(\mathbf{x}) = a_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n T(\mathbf{v}_n)$$

Exercício: Temos uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ do qual sabemos que

$$T(1,2) = (1,0),\ T(-1,1) = (1,1).$$

Encontre uma matriz A de tal forma que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$

Transformação linear, conhecida a imagem dos vetores de uma base

Solução para o exercício: Sabemos disso:

$$T(1,2) = (1,0),\, T(-1,1) = (1,1).$$

Queremos calcular a imagem do primeiro vetor da base canônica $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Transformação linear, conhecida a imagem dos vetores de uma base

Solução para o exercício: Sabemos disso:

$$T(1,2) = (1,0),\ T(-1,1) = (1,1).$$

Queremos calcular a imagem do primeiro vetor da base canônica $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Para isso, o expressamos como uma combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, já que conhecemos a imagem deles por T:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3}T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) - \frac{2}{3}T(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Transformação linear, conhecida a imagem dos vetores de uma base

Nós sabemos disso:

$$T(1,2) = (1,0),\ T(-1,1) = (1,1).$$

Calculamos a imagem do segundo vetor da base canônica $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow\ T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3}T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) + \frac{1}{3}T(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Transformação linear, conhecida a imagem dos vetores de uma base

Nós sabemos disso:

$$T(1,2) = (1,0),\ T(-1,1) = (1,1).$$

Calculamos a imagem do segundo vetor da base canônica $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow\ T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3}T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) + \frac{1}{3}T(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Já podemos escrever a matriz A para a qual $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Algumas transformações lineares importantes

- Identidade $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Algumas transformações lineares importantes

- Identidade $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
- Multipulares de identidade $T_\lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$

Algumas transformações lineares importantes

- Identidade $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
- Multipulares de identidade $T_\lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$
- A projeção ortogonal em um subespaço S.

Algumas transformações lineares importantes

- Identidade $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
- Multipulares de identidade $T_\lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$
- A projeção ortogonal em um subespaço S.

Vimos que a projeção ortogonal P_S em um subespaço S satisfaz:

$$P_S(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = P_S(\mathbf{v}) + P_S(\mathbf{w})$$

$$P_S(a\mathbf{v}) = aP_S(\mathbf{v})$$

Algumas transformações lineares importantes

- Identidade $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
- Multipulares de identidade $T_\lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$
- A projeção ortogonal em um subespaço S.

Vimos que a projeção ortogonal P_S em um subespaço S satisfaz:

$$P_S(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = P_S(\mathbf{v}) + P_S(\mathbf{w})$$

$$P_S(a\mathbf{v}) = aP_S(\mathbf{v})$$

Exercício: Encontre a matriz A, de modo que $P_S(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}$, para:

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Qual é o determinante da matriz A?

núcleo de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **Core**:

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

núcleo de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **Core**:

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

O núcleo é um *subespaço vetorial* definido implicitamente por equações lineares.

núcleo de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **Core**:

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

O núcleo é um *subespaço vetorial* definido implicitamente por equações lineares.

Exercício: Expressa implicitamente e encontra uma base para o núcleo das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; T_1(x, y) = (2x, 2y)$;

núcleo de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **Core**:

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

O núcleo é um *subespaço vetorial* definido implicitamente por equações lineares.

Exercício: Expressa implicitamente e encontra uma base para o núcleo das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \; T_2(x, y) = (x, 0, 0)$;

núcleo de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **Core**:

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

O núcleo é um *subespaço vetorial* definido implicitamente por equações lineares.

Exercício: Expressa implicitamente e encontra uma base para o núcleo das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \; T_2(x, y) = (x, 0, 0)$;
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; T_3(x, y, z) = (x, y, z)$.

núcleo de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **Core**:

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

O núcleo é um *subespaço vetorial* definido implicitamente por equações lineares.

Exercício: Expressa implicitamente e encontra uma base para o núcleo das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; T_1(x, y) = (2x, 2y);$
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \; T_2(x, y) = (x, 0, 0);$
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; T_3(x, y, z) = (x, y, z).$
- $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \; T_4(x, y, z) = x + y + z.$

núcleo de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **Core**:

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

O núcleo é um *subespaço vetorial* definido implicitamente por equações lineares.

Exercício: Expressa implicitamente e encontra uma base para o núcleo das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; T_1(x, y) = (2x, 2y);$
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \; T_2(x, y) = (x, 0, 0);$
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; T_3(x, y, z) = (x, y, z).$
- $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \; T_4(x, y, z) = x + y + z.$
- $T_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; T_5(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z).$

Imagem de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **imagem**:

$$\mathrm{Im}(T) = \{ T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Imagem de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **imagem**:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

A imagem é um *subespaço vetorial* gerado pelas imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Imagem de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **imagem**:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

A imagem é um *subespaço vetorial* gerado pelas imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.
Se A é a matriz da transformação, as imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são *as colunas de A*.

Imagem de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **imagem**:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

A imagem é um *subespaço vetorial* gerado pelas imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.
Se A é a matriz da transformação, as imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são *as colunas de A*.

Exercício: Encontre um *base* para a imagem das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;

Imagem de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **imagem**:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

A imagem é um *subespaço vetorial* gerado pelas imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.
Se A é a matriz da transformação, as imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são *as colunas de* A.

Exercício: Encontre um *base* para a imagem das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0)$;

Imagem de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **imagem**:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

A imagem é um *subespaço vetorial* gerado pelas imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.
Se A é a matriz da transformação, as imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são *as colunas de* A.

Exercício: Encontre um *base* para a imagem das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y);$
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0);$
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_3(x, y, z) = (x, y, z).$

Imagem de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **imagem**:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

A imagem é um *subespaço vetorial* gerado pelas imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.
Se A é a matriz da transformação, as imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são *as colunas de A*.

Exercício: Encontre um *base* para a imagem das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0)$;
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_3(x, y, z) = (x, y, z)$.
- $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_4(x, y, z) = x + y + z$.

Imagem de uma transformação linear

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, definimos seu **imagem**:

$$\operatorname{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

A imagem é um *subespaço vetorial* gerado pelas imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.
Se A é a matriz da transformação, as imagens por T dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são *as colunas de* A.

Exercício: Encontre um *base* para a imagem das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0)$;
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_3(x, y, z) = (x, y, z)$.
- $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_4(x, y, z) = x + y + z$.
- $T_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_5(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$.

núcleo e imagem da projeção ortogonal

Quais são o núcleo e a imagem da projeção ortogonal em $S \subset \mathbb{R}^n$?

- Seja $P_E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal em $E = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$
- Seja $P_F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal em $F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

núcleo e imagem da projeção ortogonal

Quais são o núcleo e a imagem da projeção ortogonal em $S \subset \mathbb{R}^n$?

- Seja $P_E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal em $E = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$
- Seja $P_F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal em $F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

núcleo e imagem da projeção ortogonal

Quais são o núcleo e a imagem da projeção ortogonal em $S \subset \mathbb{R}^n$?

- Seja $P_E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal em $E = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$
- Seja $P_F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal em $F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

A imagem da projeção ortogonal em $S \subset \mathbb{R}^n$ é S: sua dimensão é $d = \dim(S)$.
O núcleo da projeção ortogonal em $S \subset \mathbb{R}^n$ é $S^\perp$: sua dimensão é $n - d$.

dimensão da imagem e núcleo

Escreva a dimensão de *Space de partida*, *Space de chegada*, *Core* e *imagem* de cada uma das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;

dimensão da imagem e núcleo

Escreva a dimensão de *Space de partida*, *Space de chegada*, *Core* e *imagem* de cada uma das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y);$
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0);$

dimensão da imagem e núcleo

Escreva a dimensão de *Space de partida*, *Space de chegada*, *Core* e *imagem* de cada uma das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y);$
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0);$
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_3(x, y, z) = (x, y, z).$

dimensão da imagem e núcleo

Escreva a dimensão de *Space de partida*, *Space de chegada*, *Core* e *imagem* de cada uma das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y);$
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0);$
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_3(x, y, z) = (x, y, z).$
- $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_4(x, y, z) = x + y + z.$

dimensão da imagem e núcleo

Escreva a dimensão de *Space de partida*, *Space de chegada*, *Core* e *imagem* de cada uma das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y);$
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0);$
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_3(x, y, z) = (x, y, z).$
- $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_4(x, y, z) = x + y + z.$
- $T_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_5(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z).$

dimensão da imagem e núcleo

Escreva a dimensão de *Space de partida*, *Space de chegada*, *Core* e *imagem* de cada uma das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0)$;
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_3(x, y, z) = (x, y, z)$.
- $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_4(x, y, z) = x + y + z$.
- $T_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_5(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$.

Exercício: Encontre uma relação entre esses números:

dimensão da imagem e núcleo

Escreva a dimensão de *Space de partida*, *Space de chegada*, *Core* e *imagem* de cada uma das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y);$
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0);$
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_3(x, y, z) = (x, y, z).$
- $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_4(x, y, z) = x + y + z.$
- $T_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_5(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z).$

Exercício: Encontre uma relação entre esses números:

$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) =$ dimensão do espaço inicial $= n$.

dimensão da imagem e núcleo

Escreva a dimensão de *Space de partida*, *Space de chegada*, *Core* e *imagem* de cada uma das seguintes transformações lineares:

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (2x, 2y)$;
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x, 0, 0)$;
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_3(x, y, z) = (x, y, z)$.
- $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_4(x, y, z) = x + y + z$.
- $T_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_5(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$.

Exercício: Encontre uma relação entre esses números:

$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) =$ dimensão do espaço inicial $= n$.

Exercício: Para cada uma das transformações anteriores, encontra uma base do espaço de partida $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, de modo que os primeiros r $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ sejam uma base de $\ker(T)$ e *a imagem* dos $n - r$ restantes $\{T(\mathbf{v}_{r+1}), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

Cambio de base

Matriz de cambio de base

Dada uma base $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_d}\}$ de $\mathbb{R}^d$, observamos que a matriz

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_d \end{array} \right]$$

é a matriz da transformação linear $T(x_1, \ldots, x_d) = (y_1, \ldots, y_d)$ que recebe as coordenadas de um vector $\mathbf{u} = \mathbf{x_1 v_1} + \ldots \mathbf{x_d v_d}$ na base $\{\mathbf{v_i}\}$ e devolve as coordenadas do mesmo vetor $\mathbf{u} = (\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_d}) = \mathbf{y_1 e_1} + \ldots \mathbf{y_n e_n}$ na base canónica $\{\mathbf{e_i}\}$.

Em outras palavras, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$.

Cambio de base

Matriz de cambio de base

Dada uma base $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_d}\}$ de $\mathbb{R}^d$, observamos que a matriz

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_d \end{array}\right]$$

é a matriz da transformação linear $T(x_1, \ldots, x_d) = (y_1, \ldots, y_d)$ que recebe as coordenadas de um vector $\mathbf{u} = \mathbf{x_1 v_1} + \ldots \mathbf{x_d v_d}$ na base $\{\mathbf{v_i}\}$ e devolve as coordenadas do mesmo vetor $\mathbf{u} = (\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_d}) = \mathbf{y_1 e_1} + \ldots \mathbf{y_n e_n}$ na base canónica $\{\mathbf{e_i}\}$.

Em outras palavras, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$.

Q é a **matriz de cambio da base da base $\{\mathbf{v_i}\}$ á base $\{\mathbf{e_i}\}$.**

Cambio de base

E o contrário? Como podemos achar a **matriz de cambio da base** da base $\{\mathbf{e_i}\}$ á base $\{\mathbf{v_i}\}$?

Cambio de base

E o contrário? Como podemos achar a **matriz de cambio da base** da base $\{\mathbf{e_i}\}$ á base $\{\mathbf{v_i}\}$?
Invertendo a matriz Q:

$$Q^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

Cambio de base

E também podemos encontrar a matriz A da transformação linear $T(x_1, \ldots, x_d) = (y_1, \ldots, y_d)$ que recebe as coordenadas de um vector $\mathbf{u} = \mathbf{x_1 v_1} + \ldots \mathbf{x_d v_d}$ na base $\{\mathbf{v_i}\}$ e devolve as coordenadas do mesmo vetor $\mathbf{u} = (\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_d}) = \mathbf{y_1 w_1} + \ldots \mathbf{y_n w_n}$ em outra base $\{\mathbf{w_i}\}$ de forma similar...

Cambio de base

E também podemos encontrar a matriz A da transformação linear $T(x_1, \ldots, x_d) = (y_1, \ldots, y_d)$ que recebe as coordenadas de um vector $\mathbf{u} = \mathbf{x_1 v_1} + \ldots \mathbf{x_d v_d}$ na base $\{\mathbf{v_i}\}$ e devolve as coordenadas do mesmo vetor $\mathbf{u} = (\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_d}) = \mathbf{y_1 w_1} + \ldots \mathbf{y_n w_n}$ em outra base $\{\mathbf{w_i}\}$ de forma similar...
Se

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_d \end{array} \right]$$

,

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_d \end{array} \right]$$

então $M = P^{-1} \cdot Q$.

Cambio de base

E também podemos encontrar a matriz A da transformação linear $T(x_1, \ldots, x_d) = (y_1, \ldots, y_d)$ que recebe as coordenadas de um vector $\mathbf{u} = \mathbf{x_1 v_1} + \ldots \mathbf{x_d v_d}$ na base $\{\mathbf{v_i}\}$ e devolve as coordenadas do mesmo vetor $\mathbf{u} = (\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_d}) = \mathbf{y_1 w_1} + \ldots \mathbf{y_n w_n}$ em outra base $\{\mathbf{w_i}\}$ de forma similar...
Se

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_d \end{array}\right]$$

,

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_d \end{array}\right]$$

então $M = P^{-1} \cdot Q$.
É um exercício fácil. Leia a seção 4.8 do livro se tiver alguma dúvida.