Repaso de Matrices, Vectores e Conjuntos

Pablo Angulo, Fabricio Macià

Universidade Pedagogica de Maputo

Que é um conjunto?

Um conjunto é uma coleção de objetos, que chamamos *elementos* do conjunto.Normalmente, usaremos letras maiúsculas A, B, C, etc.para nos referir aos conjuntos.

Um conjunto é descrito especificando quais são seus elementos. Estes são listados por uma lista colocada entre as chaves $\{\}$.

Por exemplo, se D é o conjunto formado pelos números naturais de um a dez, escrevemos:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

pertence e não pertence

Dizer que um objeto a é um elemento de um conjunto A, escrevemos:

$$a \in A,$$

Isso diz a **pertence a** A.O oposto, a não pertence a A está escrito:

$$a \notin A.$$

Por exemplo, se D é o conjunto de transparência anterior, é verdade que:

$$5 \in D, \quad \text{y} \quad 1/2 \notin D.$$

subconjunto

Dois conjuntos A e B são *igual* se eles tiverem exatamente os mesmos elementos.Nesse caso, escrevemos:

$$A = B.$$

Se todo elemento de A também é um elemento de B, dizemos que A é um **subconjunto** de B e nós o escrevemos:

$$A \subset B.$$

Dizem também que A está contido em B.
Por exemplo, o todo

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

é um subconjunto de D, embora D contenha mais elementos do que os de P.Nesse caso:

$$P \subset D, \quad \text{mas} \quad P \neq D.$$

descrevendo o subconjunto

Há outra maneira de descrever o subconjunto P da transparência anterior.A idéia é, em vez de listar todos os seus elementos, descrevendo-a como aqueles elementos de D que têm uma certa propriedade.Nesse caso, a propriedade é que esses são os elementos de D que são números uniformes.
Vamos escrever assim:

$$P = \{n \in D \,:\, n \text{é um número de par}\}.$$

Você também pode escrever:

$$P = \{2n \,:\, n = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Aqui, os dois pontos ':' significa '*com a propriedade que*'.

Conjuntos famosos

Certamente você sabe os seguintes conjuntos:

- O conjunto $\mathbb{N}$ dos **números naturais**.Eles são os números que usamos para contar (incluindo zero):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

- O conjunto $\mathbb{Z}$ do **números inteiros**.Eles são obtidos adicionando seus negativos aos números naturais:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}.$$

- O conjunto $\mathbb{Q}$ do **números racionais**.É formado por frações cujo numerador e denominador são números inteiros:

$$\mathbb{Q} = \{a/b \,:\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}.$$

Conjuntos famosos

Finalmente, temos todo o **números reais**, que escrevemos com a letra $\mathbb{R}$. Este conjunto é formado por todos os números que admitem uma expansão decimal.
Temos as seguintes inclusões:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Nem todos os números reais são racionais

$$\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}.$$

Por exemplo, Pitágoras mostrou que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.Tente demonstrar isso também.
Outros exemplos de números reais que não são racionais são $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$.A demonstração de que π é irracional não é tão fácil.A propósito, você sabe como definir exatamente quanto vale π?

Produto cartesiano

Produto cartesiano $A \times B$ de dois conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) em que a é um elemento de A e b é um elemento de B.
Disse de outra maneira:

$$A \times B = \{(a, b) \,:\, a \in A,\ b \in B\}.$$

Por exemplo, sim:

$$A = \{0, 2, 4\}, \quad B = \{1, 3\}$$

então:

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 3), (2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}.$$

Produto cartesiano

O produto cartesiano de um conjunto A por si só $A \times A$ é geralmente escrito como A^2. Então:

$$A^2 = \{(a_1, a_2) \,:\, a_1, a_2 \in A\}.$$

Por exemplo:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

Pode ser reprimido graficamente como o conjunto de pontos planos com coordenadas x E y.

Ejercicio

Graph o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(a, a) \,:\, a \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{(b, 3) \,:\, b \in \mathbb{R}\}.$$

Produto cartesiano

O produto cartesiano de três conjuntos A, B, C é definido analogamente:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \,:\, a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}.$$

Vamos também abreviar $A^3 = A \times A \times A$.

Em geral, o produto cartesiano de qualquer número de conjuntos pode ser considerado.
Além disso, para qualquer número natural n:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n \text{ veces}}.$$

Union e interseção de dois conjuntos

- A união de dois conjuntos A e B é o conjunto cujos elementos são precisamente todos os elementos de A e todos os elementos de B.Está escrito:
$$A \cup B.$$
- A interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto cujos elementos são aqueles que estão em A e em B:
$$A \cap B = \{\text{elementos comuns a } A \text{ y } B\}.$$

Por exemplo, sim:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5\}$$

então:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B = \{2, 3\}.$$

Claramente:

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}.$$

Union e interseção de dois conjuntos

Se A e B não têm elementos em comum, dizemos que o cruzamento deles é o conjunto vazio.Nós escrevemos:

$$A \cap B = \emptyset.$$

A montagem vazia é um conjunto sem nenhum elemento.A introdução dessa noção serve para tornar o interseção de conjuntos sempre um conjunto, mesmo que não tenha elementos.
A união do conjunto vazio com qualquer outro conjunto é ele mesmo:

$$A \cup \emptyset = A.$$

Ejercicio

Gráfico $A \cup B$ e $A \cap B$ sendo A e B o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(a, a) \,:\, a \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{(b, 3) \,:\, b \in \mathbb{R}\}.$$

complementar

O complemento de um conjunto B dentro de um conjunto A é o conjunto:

$$A \setminus B = \{\text{Elementos de } A \text{ que não são elementos de } B\}.$$

Por exemplo:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

É o conjunto de **números irracionais**, ou seja, os números reais que não podem ser escritos como uma fração cujo numerador e denominador são números inteiros.
Calcule $A \setminus B$ para exemplos da transparência anterior.

definição da matriz

Um **Matriz** A de linhas n e d colunas e **entradas reais** é uma tabela formada por números reais com esse número de linhas e colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nd} \end{bmatrix}.$$

Elemento [9-3]

a_{ij} é o elemento na linha i e na coluna j da matriz.

Dimensiones de la matriz

O número de linhas n e o número de colunas d são chamadas *dimensões* de A.

Vamos dizer que A é uma matriz $n \times d$.

matriz transposta

A matriz **transposta** de uma matriz A é a matriz que possui as colunas de A:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1d} & a_{2d} & \cdots & a_{nd} \end{bmatrix}.$$

Se A possui n linhas e d colunas, a matriz transposta A^T possui d linhas e n colunas. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

vetor coluna

A **Vector coluna** de d Coordenadas é uma matriz formada por *uma coluna e d linhas* cujas entradas são números reais (ou seja, uma matriz $d \times 1$).

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix}, \text{ sendo } v_1, v_2, ..., v_d \in \mathbb{R}.$$

Vetor zero é aquele com todas as suas entradas iguais a zero:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

vetores linha

Um **vetor linha** é uma matriz com uma linha e d colunas: é o resultado de transpor um vetor coluna.Sim

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix}$$

Em seguida, a matriz transposta **v** é o vetor linha:

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_d \end{bmatrix}.$$

Negrito em minúsculas é sempre um vetor coluna

Desde que escrevimos $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ou qualquer letra minúscula em **Bold** estamos nos referindo a um **Vector de coluna**.Se queremos escrever um vetor como uma linha, temos que transpor-o: $\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T$, etc.

Matrizes quadradas

Uma **Matriz quadrada** é uma matriz que possui o mesmo número de linhas que de colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{bmatrix}$$

Diagonal de la matriz

Os elementos do **diagonal** de uma matriz quadrada são entradas $a_{11}, a_{22}, ..., a_{dd}$.

Traço de uma matriz quadrada

O **Traço** de uma matriz quadrada é a soma das entradas na diagonal $\mathrm{Tr}\, A = a_{11} + a_{22} + ... + a_{dd}$.

Matriz identidade

O **Matriz identidade** do tamanho d é a matriz quadrada $d \times d$ cujos elementos da diagonal são um, e o restante é zero:

$$\mathrm{Id}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Se d estiver claro para o contexto, escreveremos Id em vez de Id_d.

Matriz dada por colunas

Podemos escrever uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nd} \end{bmatrix},$$

Em termos de seus vetores colunas:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_d \end{array} \right],$$

onde

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad \mathbf{a}_d = \begin{bmatrix} a_{1d} \\ a_{2d} \\ \vdots \\ a_{nd} \end{bmatrix}.$$

Matriz dada por suas fileiras

Também podemos escrever a matriz em termos de seus vetores linha:

$$A = \left[\begin{array}{c} (\mathbf{f}_1)^T \\ \hline (\mathbf{f}_2)^T \\ \hline \vdots \\ \hline (\mathbf{f}_n)^T \end{array} \right],$$

$$(\mathbf{f}_1)^T = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \end{array} \right],$$

$$(\mathbf{f}_2)^T = \left[\begin{array}{cccc} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \end{array} \right],$$

$$\vdots$$

$$(\mathbf{f}_n)^T = \left[\begin{array}{cccc} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nd} \end{array} \right].$$

ATENÇÃO: As linhas são expressas como matrizes transpostas $(\mathbf{f}_1)^T, (\mathbf{f}_2)^T, ..., (\mathbf{f}_n)^T$ dos vetores da coluna $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n$.
Reservar letras em negrito para vetores coluna evitarão confusão.

soma das matrizes

Se A e B são matrizes *com as mesmas dimensões*, então é **sum**: $A + B$ é definido como a matriz que resulta da adição das entradas correspondentes de A e B.Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se duas matrizes não têm as mesmas dimensões, então sua soma não será definida

Produto por um número.

Dada uma matriz A e um número real λ, o **Produto** λA é a matriz que possui *as mesmas dimensões* que A e as entradas são iguais às entradas de A multiplicadas por λ. Por exemplo:

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Produto ou multiplicação de matrizes (i).

O produto do vetor de uma linha $\mathbf{u}^T$ com colunas d por um vetor coluna $\mathbf{v}$ com linhas d **é um número** que é definido assim:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_d v_d.$$

O número de colunas de $\mathbf{u}^T$ *deve ser igual ao número de linhas de* $\mathbf{v}$

A ordem é importante: O produto de um vetor coluna pode ser definido por um vetor linha, mas não corresponde à fórmula anterior (nós o definiremos mais tarde).

O número $\mathbf{u}^T\,\mathbf{v}$ *é chamado* **Produto escalar** *dos vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

Matrices Produto (ii)

A matriz $n \times m$.

B matriz $m \times d$.

Produto $C = AB$ é uma matriz com linhas n (número de linhas de A) e d colunas (número de colunas de B).

Sim A e B são dados respectivamente por suas fileiras e colunas:

$$A = \left[\begin{array}{c} (\mathbf{f}_1)^T \\ \hline (\mathbf{f}_2)^T \\ \hline \vdots \\ \hline (\mathbf{f}_n)^T \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_d \end{array}\right],$$

Então a entrada de $C = AB$ na linha i e a coluna j é:

$$c_{ij} = (\mathbf{f}_i)^T \mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

O produto de matrizes não é comutativo

A matriz $n \times m$.

B matriz $m \times d$.

Se $n \neq d$, *não puder ser definido* BA.

Para que ambos os produtos AB e BA sejam definidos, as matrizes A e B precisam ter dimensões $n \times d$ e $d \times n$

AB matriz $n \times n$.

BA matriz $d \times d$.

O produto matric não é comutativo

mesmo que AB *e* BA *tenham as mesmas dimensões* (quando A e B são matrizes quadradas $n \times n$), AB e BA podem ser *diferentes matrizes*:

$$AB \neq BA.$$

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

mas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O produto matric não é comutativo

mesmo que AB *e* BA *tenham as mesmas dimensões* (quando A e B são matrizes quadradas $n \times n$), AB e BA podem ser *diferentes matrizes*:

$$AB \neq BA.$$

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

mas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como em geral, são duas operações diferentes, teremos o cuidado de indicar se *multiplicamos à esquerda* ou *multiplicamos à direita*.
Por exemplo, $A = B$ segue tanto $AC = BC$ quanto $CA = CB$, mas não segue necessariamente $AC = CB$.

Embora algumas matrizes comutem

No entanto, existem matrizes para as quais é verificado que $AB = BA$.Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dizem duas matrizes com a propriedade que $AB = BA$ **comutem**.

A matriz identidade *comuta* com qualquer outra.

$$\mathrm{Id} \cdot A = A \cdot \mathrm{Id} = A$$

Propriedade distributiva

O produto de matrizes possui a propriedade distributiva em relação à soma. Se as matrizes A, B, C tiverem as dimensões apropriadas:

A matriz $n \times m$.

B matriz $m \times d$.

B matriz $m \times d$.

Então temos:

- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(B + C)A = BA + CA$.

Produto de uma matriz por um vetor: Primeira forma, usamos as fileiras de A

Como é o produto da matriz A ($n \times d$) pelo vetor $\mathbf{v}$ (de $\mathbb{R}^d$)?

$$A = \left[\begin{array}{c} (\mathbf{f}_1)^T \\ \hline (\mathbf{f}_2)^T \\ \hline \vdots \\ \hline (\mathbf{f}_n)^T \end{array}\right], \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \dots \\ \mathbf{v}_d \end{bmatrix}$$

O produto $A \cdot \mathbf{v}$ o vetor da coluna cujos componentes são o produto escalar das fileiras de A pelo vetor $\mathbf{v}$.

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (\mathbf{f}_1)^T \mathbf{v} \\ (\mathbf{f}_2)^T \mathbf{v} \\ \dots \\ (\mathbf{f}_n)^T \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

Produto de uma matriz por um vetor: Segunda forma, usamos as colunas de A

Como é o produto da matriz A $(n \times d)$ pelo vetor $\mathbf{v}$ $(\mathbb{R}^d)$?

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_d \end{array} \right], \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_d \end{bmatrix}$$

Primeiro, definimos vetores

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d,$$

Observamos que $A \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$

Agora usamos propriedade distributiva:

$$A\,\mathbf{v} = A\left(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_d\mathbf{e}_d\right) = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \ldots + v_d\mathbf{a}_d$$

Produto tensor

O que acontece se multiplicarmos um vetor coluna por um vetor linha?

$$\mathbf{v}\,\mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & \cdots & v_1 w_n \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & \cdots & v_2 w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_d w_1 & v_d w_2 & \cdots & v_d w_n \end{bmatrix}.$$

Produto tensorial de [18-10] y [18-11]

Foi tratado de uma matriz de linhas d e colunas n que são conhecidas como **Produto Tensionista** dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
Nós escrevemos $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v}\,\mathbf{w}^T$

As dimensões permitem fazer o produto, mesmo que sejam vetores de diferentes espaços ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$).

É importante não confundi -lo com o produto escalar.